

# 格点量子场论简介

林沛晗 2300011401

2025 年 11 月

## 目录

1 引言	1
2 格点规范场论	2
2.1 基本理论	2
2.2 应用	4
3 格点费米子	5
3.1 费米子加倍问题和 Nielsen-Ninomiya 定理	6
3.2 格点费米子的实现方案	7
3.2.1 Wilson 费米子	7
3.2.2 Kogut-Susskind 交错费米子	7
3.2.3 畴壁费米子和重叠费米子	8
4 总结	9

## 摘要

本文介绍了格点量子场论的基本理论。首先介绍了格点量子场论的必要性，并以格点标量场论为例说明；其次描绘了格点规范场论的基本内容和方法；最后讲解了格点费米子场论，包括其“天真”定义存在的问题、Nielsen-Ninomiya 定理、以及正确的构造方案。

## 1 引言

格点量子场论指的是将场变量定义在离散化时空坐标上的量子场论理论。对于非平庸的量子场论，紫外发散要求为正规化整个理论，必须要存在一个内禀的截断能标  $\Lambda$ ，而一个方便的实现方式是格点正规化，因为格点间距  $a$  使理论自动获得截断能标  $\Lambda \sim \frac{\pi}{a}$ 。

格点量子场论具有强大的应用优势。首先，格点量子场论的自由度虽然很大但是有限，故路径积分从一个无穷维的积分，变为了一个非常高维但仍然有限的积分。计算机通过使用重要性采样的蒙特卡洛数值模拟，可以用统计方法数值求出这个积分，并推导相应的关联函数等物理量。所以格点量子场论可以视作非微扰量子场论的实现方式，也是大规模非微扰

计算的基础。格点量子场论更大的威力体现在格点量子色动力学 (LQCD) 的模拟上。对于我们关心的能区范围, 非微扰场论是唯一的方法, 而 LQCD 则是几乎唯一的第一性原理输出可控的非微扰量子色动力学计算方法。这两点导致了格点量子场论事实上成为了应用最广泛的 (非微扰型) 量子场论 [1]。

以下考虑最简单的一个例子: 3+1 维时空中标量场论在格点上的实现。首先需要离散化时空坐标, 为避免非紧致的  $SO(3,1)$  群对晶格结构的影响, 需要通过 Wick 转动变到 Euclid 时空。这样, 时空格点表示为  $x = a \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu} \hat{\mu}$  ( $x_{\mu} \in \mathbb{Z}$ ) [2]。需要注意, 时空的离散化实际上将  $SO(4)$  的连续对称群破缺成了超立方群点群。这可能导致若干微妙的效应。首先, 连续时空中粒子的自旋按照  $SO(4)$  不可约表示分类, 但这些表示可能破缺为超立方群的同一个表示。所以当激发特定自旋的粒子时, 实际上激发的是属于同一格点表示的所有粒子态。这导致计算粒子谱时需要使用更精细的算法。其次, 重整化的作用量中可能出现某些在连续时空中破缺洛伦兹对称性, 但仍然满足超立方群对称性的附加项。这些附加项在量级上为  $O(a)$ , 需通过添加抵消项消去, 即所谓的 *Symanzik 改进* [1]。

接下来考虑标量场作用量的离散化。通过用离散差分代替连续导数:

$$\partial_{\mu} \phi(x) = \frac{\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a}, \quad (1.1)$$

且将积分写作离散求和, 可以写出作用量:

$$S = a^4 \sum_x \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \left( \frac{\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a} \right)^2 + V(\phi(x)) \right], \quad (1.2)$$

进而求解生成泛函:

$$Z[J] = \int \prod d\phi(x) e^{-S[\phi(x)] + a^4 \sum_x J(x)\phi(x)}. \quad (1.3)$$

## 2 格点规范场论

### 2.1 基本理论

以上格点标量场论未免显得过于简单。我们接下来讨论格点量子场论的核心支柱之一——格点规范场论。历史上, Wilson 在他的划时代论文《夸克禁闭》[3] 中首次引入了定义在格点上的具有规范对称性的量子场论, 并且用其讨论了 QCD 夸克禁闭这一高度非微扰的理论问题<sup>1</sup>。这是人们对于 QCD 微扰计算的首次探讨, 更体现了格点规范场论的重要性。

接下来讲述格点规范场论的构建。一个自然的思路是在格点上引入四个方向的规范场  $A_{\mu}(x)$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ )。然而这有两个缺点。首先  $A_{\mu}(x)$  具有冗余的规范自由度, 直接路径积分会出现发散。在连续场论中可以使用 Faddeev-Popov 量子化方案进行规范固定, 但在格点场论中这一操作更为繁琐。其次对于常见的非 Abel 规范群, 群元素是紧致的, 但 Lie 代数是而非紧致的, 故涵盖所有可能的 Lie 代数取值的数值积分存在问题。

<sup>1</sup>虽然受限于当时计算资源, 他使用的是强耦合展开的论述

基于以上讨论，需要转向将规范群内元素作为动力学变量。Wilson 引入了**链变量**的概念：

$$U_\mu(x) = \mathcal{P} \exp \left( i \int_x^{x+a\hat{\mu}} A(x') dx' \right). \quad (2.1.1)$$

这一定义有几个明显优点。首先，它直接属于规范群  $SU(3)$ ，故具有紧致性，在流形上积分时能够保留拓扑结构。其次，在连续极限  $a \rightarrow 0$  下，它退化为  $e^{iaA_\mu(x)}$ 。最后，其规范变换有简单的形式：

$$U'_\mu(x) = \Omega(x)U_\mu(x)\Omega^{-1}(x+a\hat{\mu}). \quad (2.1.2)$$

直观理解，规范群作用在格点上，而链变量相当于连接格点的“桥梁”。

应用这一性质，可以写出规范不变的物理量，即**单位 Wilson 圈**：

$$W_{\mu\nu}(x) = \text{Tr} U_\mu(x)U_\nu(x+a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x+a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x). \quad (2.1.3)$$

它直接联系到规范场张量：

$$W_{\mu\nu}(x) = \text{Tr} \mathcal{P} \exp(i \oint_{\square} \vec{A}(x') \cdot d\vec{x}') = \text{Tr} \exp(i \iint_{\square} F_{\mu\nu}(x') dx'). \quad (2.1.4)$$

其中定义了  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$ 。<sup>2</sup>在  $a \rightarrow 0$  极限下，右侧简化为

$$1 + ia^2 \text{Tr} F_{\mu\nu}(x) - \frac{a^4}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + O(a^6) = 1 - \frac{a^4}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + O(a^6). \quad (2.1.5)$$

利用这一性质，Yang-Mills 场的作用量被离散化作：

$$S = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) \approx \frac{1}{g^2} \sum_x \sum_{\mu\nu} \text{Re}(W_{\mu\nu}(x) - 1). \quad (2.1.6)$$

本部分的最后将考虑一些细节性的问题。一是规范场和标量场的耦合。这需要离散化协变导数算符：

$$(\partial_\mu + iA_\mu)\phi(x) = \frac{1}{a} (\phi(x+a\hat{\mu}) - \phi(x) - (U_\mu^\dagger(x) - 1)\phi(x)) = \frac{1}{a} (\phi(x+a\hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(x)\phi(x)). \quad (2.1.7)$$

那么

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x |D_\mu \phi(x)|^2 \\ &= a^2 \sum_x \sum_\mu [2\phi^\dagger(x)\phi(x) - \phi^\dagger(x)U_\mu(x)\phi(x+a\hat{\mu}) - \phi^\dagger(x+a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x)\phi(x)]. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

二是路径积分中规范场的体积微元。这可以通过 Haar 测度定义。对于常见 Lie 群，Haar

<sup>2</sup>需要注意，以上公式并不严谨，因为 Abel 场的 Stokes 定理无法直接推广到非 Abel 场。严谨的证明可见 [2]。

测度即流形上的不变面元。例如，对于  $SU(n)$ ,

$$U = e^{i \sum_a \alpha_a T_a} \Rightarrow \int dU = \int d^{N^2-1} \alpha \sqrt{\det \gamma}. \quad (2.1.9)$$

其中

$$\gamma_{ab} = \text{Tr} \left[ U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \alpha_a} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \alpha_b} \right]. \quad (2.1.10)$$

注意由于重排定理，Haar 测度具有左右作用不变性：

$$\int dU = \int d[U_1 U] = \int d[U U_1]. \quad (2.1.11)$$

## 2.2 应用

本节中讨论格点规范场论的一个重要应用——夸克禁闭和退禁闭的非微扰处理。为此，考虑一个足够大的 Wilson 圈（见图 1）。其对应的算符为

$$W(L, T) = \prod_{(x, \mu) \in C} U_\mu(x) = \text{Tr} [S(\vec{x} \rightarrow \vec{x} + L, t_0) S^\dagger(\vec{x} + L \rightarrow \vec{x}, t_0 + T)]. \quad (2.2.1)$$

其中， $(x, \mu) \in C$  表示对 Wilson 圈边界上所有链变量的连乘积。 $S[\vec{x} \rightarrow \vec{y}, t]$  为图中“水平方向”的操作，可以证明  $S[\vec{x} \rightarrow \vec{y}, t]|\text{vac}\rangle$  相当于在  $t$  时刻于  $\vec{x}$  和  $\vec{y}$  坐标处产生一对夸克和反夸克。图中“垂直方向”的操作已经被  $A_0 = 0$  的规范固定消去。所以， $W(L, T)$  的物理意义为产生一对相距  $L$  的夸克-反夸克，并且让其在时间  $T$  之内演化，随后再湮灭之。在  $T \rightarrow \infty$  极限下， $W(L, T)$  期望值的渐进行为是

$$\langle W(L, T) \rangle \rightarrow e^{-V(L)T}, \quad (2.2.2)$$

其中  $V(L)$  为夸克-反夸克对的束缚能，也称作其静态势能。

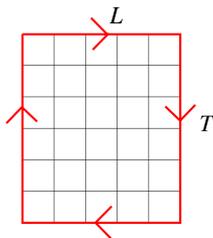


图 1: 足够大的 Wilson 圈。

接下来在强耦合 ( $g \gg 1$ ) 和弱耦合 ( $g \ll 1$ ) 极限下计算  $\langle W(L, T) \rangle$ 。对于强耦合极限，

可以进行泰勒展开:

$$\langle W(L, T) \rangle = \frac{\int dU \prod_{(x, \mu) \in C} U_\mu(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{g^2} \sum_{x' \in A} W_{10}(x') \right)^n}{\int dU \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{g^2} \sum_{x' \in A} W_{10}(x') \right)^n}. \quad (2.2.3)$$

这里将  $L$  的方向取做  $\mu = 1$ 。  $x'$  的求和范围为 Wilson 圈所围的空间面积。根据 Haar 测度的性质, 只有当所有  $U_\mu$  出现偶数次时积分方能非零。故领头阶贡献为

$$\langle W(L, T) \rangle \sim \left( \frac{1}{g^2} \right)^{LT/a^2}. \quad (2.2.4)$$

这表明强耦合极限下,  $\langle W(L, T) \rangle$  满足**面积率**。对应的静态势能为

$$V(L) \sim \frac{2L}{a^2} \ln g = \sigma L, \quad \sigma = \frac{2}{a^2} \ln g. \quad (2.2.5)$$

$\sigma$  被称作**弦张力**。所以,  $L \rightarrow \infty$  时  $V$  发散, 也就是无法将夸克-反夸克对移动到相隔无穷远。这就是强耦合极限下的**夸克禁闭**效应。

对于弱耦合极限, 指数上的  $\frac{1}{g^2} \gg 1$  因子极为显著, 导致起主导贡献的为所有单个链变量“非零”的构型, 而规范场的非 Abelian 性质使分析比较复杂。但可以使用更简单的三维  $\mathbb{Z}_2$  规范场论的结论 [4], 来定性说明  $\langle W(L, T) \rangle$  的渐进行为。我们发现, 弱耦合极限下  $\langle W(L, T) \rangle$  满足**周长率**:

$$W(L, T) \sim e^{-\frac{2(L+T)}{ag^2}}. \quad (2.2.6)$$

故静态势能在  $T \rightarrow \infty$  极限下趋向于与  $L$  无关的定值  $\frac{2}{ag^2}$ , 夸克-反夸克对不再被束缚。这就是弱耦合极限下的**夸克退禁闭**效应。

### 3 格点费米子

本节中讨论格点费米子场论。首先尝试最简单的差分化方式, 即所谓的**天真费米子** [1] (为简单起见, 本节取  $a = 1$ ):

$$S_0 = \int d^4x \bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\mu + m_0) \psi \approx \sum_x \left[ \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\psi(x + \hat{\mu}) - \psi(x - \hat{\mu})}{2} + m_0 \bar{\psi}(x) \psi(x) \right]. \quad (3.1)$$

将式 (3.1) 变换到动量空间:

$$S_0 = \sum_{p \in 1\text{BZ}} \bar{\psi}(p) (i\gamma_\mu \sin p_\mu + m_0) \psi(p), \quad (3.2)$$

其中  $p$  的求和范围为第一 Brillouin 区,  $[-\pi, \pi]^4$ 。则传播子为

$$G(p) = \frac{1}{i\gamma_\mu \sin p_\mu + m_0} = \frac{-i\gamma_\mu \sin p_\mu + m_0}{m_0^2 + \sum_\mu \sin^2 p_\mu}. \quad (3.3)$$

### 3.1 费米子加倍问题和 Nielsen-Ninomiya 定理

然而，式 (3.1) 所定义的天真费米子作用量，以及其对应的传播子（式 (3.3)）存在严重问题，即著名的费米子加倍。首先考虑  $m_0 = 0$  极限下的情况，此时传播子因为正弦函数的周期性存在 16 个极点：

$$p_\mu = (n_1\pi, n_2\pi, n_3\pi, n_4\pi), \quad n_{1,2,3,4} = 0, 1. \quad (3.1.1)$$

这表明天真费米子作用量其实引入了 16 种费米子。然而物理上合理的极点只有  $(0, 0, 0, 0)$  这一个，而剩余 15 个“加倍态”是非物理的（或称额外的），且在连续极限 ( $a \rightarrow 0$ ) 下它们并不消失。进一步，在有质量情况下，费米子加倍的现象仍然存在，因为 16 个极点同时获得相同的质量  $m_0$ ，对低能物理都起贡献。

接下来分析费米子加倍问题的来源。以无质量费米子为例， $G^{-1}(p)$  只含  $\gamma_\mu$  项，故  $\{G^{-1}(p), \gamma_5\} = 0$ ，系统具有  $\gamma_5$  手征对称性。故在极点（以  $\alpha$  标记）附近，可以对传播子的核进行展开：

$$i\gamma_\mu \sin p_\mu = i \sum_{\mu\nu} v_{\mu\nu}^{(\alpha)} (p_\mu - (p_\alpha)_\mu) \gamma_\nu. \quad (3.1.2)$$

定义费米子的拓扑手性：

$$c_\alpha = \text{sgn det } v_{\mu\nu}^{(\alpha)}. \quad (3.1.3)$$

可以验证，16 个加倍费米子中，有 8 个拓扑手性为 1，8 个为  $-1$ ，且  $(0, 0, 0, 0)$  处的拓扑手性为 1。故可以猜想，无法引入单个位于  $(0, 0, 0, 0)$  处的费米子的原因为，当系统具有  $\gamma_5$  手征对称性时，**正负拓扑手性的费米子只能成对出现**。这就是著名的 Nielsen-Ninomiya 定理。

Nielsen-Ninomiya 定理可以视作 Poincaré-Hopf 定理<sup>3</sup>的推论。后者表明，对于  $n$  维流形  $M$  上的  $n$  维向量场  $\vec{v}$ ， $\vec{v}$  于孤立零点处的同伦群指标之和等于  $M$  的欧拉示性数：

$$\sum_{\alpha} \text{index}_{\alpha} \vec{v} = \chi(M), \quad (3.1.4)$$

其中向量场在孤立零点处的同伦群指标定义为零点邻域  $\partial D$  到球面  $S^{n-1}$  的映射重复度 [5]。在 Nielsen-Ninomiya 定理的情况下， $\vec{v}_\mu = \sin p_\mu$ ，零点对应传播子的极点。故  $\text{index}_{\alpha} \vec{v} = c_\alpha$ ，式 (3.1.4) 的左侧等于拓扑手性之和。而流形  $M$  为第一布里渊区，它拓扑等价于四维环面  $T^4$ ，因此其欧拉示性数为 0。因此

$$\sum_{\alpha} c_\alpha = 0. \quad (3.1.5)$$

总而言之，Nielsen-Ninomiya 定理断言，当系统具有  $\gamma_5$  手征对称性时，布里渊区内拓扑手性荷之和为零，正负拓扑手性荷的费米子必须成对出现。在连续极限下，拓扑手性荷退化为按  $\gamma_5$  本征值定义的手性，所以定理意味着**不可能构造出在单个手征费米子的格点离散化**。这正是非微扰手征规范理论在格点上遇到的根本困难。

<sup>3</sup>参见：[https://en.wikipedia.org/wiki/Poincaré-Hopf\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Poincaré-Hopf_theorem).

### 3.2 格点费米子的实现方案

上一节我们看到, Nielsen-Ninomiya 定理禁止了存在手征对称性时格点上单个具有拓拓扑手征荷的费米子的出现。以下介绍三种可能的构造方式, 它们使用了不同方式绕开 Nielsen-Ninomiya 定理的假设。

#### 3.2.1 Wilson 费米子

第一种构造方式是 **Wilson 费米子**。它的思路是显式加入一个附加项:

$$S_W = -r \cdot \sum_{x,\mu} \bar{\psi}(x)(\psi(x + \hat{\mu}) - 2\psi(x) + \psi(x - \hat{\mu})). \quad (3.2.1)$$

傅立叶变换之后, 动量空间传播子的逆为

$$G^{-1}(p) = i\gamma_\mu \sin k_\mu + 4r \sin^2 \frac{k_\mu}{2} + m_0. \quad (3.2.2)$$

除物理极点  $p = (0, 0, 0, 0)$  不变外, 其余极点均被抬高, 直至被推到紫外尺度。故在低能物理中, 加倍子近似被消去。而且 Wilson 项并不改变  $p = (0, 0, 0, 0)$  物理费米子的拓拓扑手性。故 Wilson 费米子的优势在于, 它通过引入附加项使得能谱中只存在单个物理上合理的手征费米子。但代价是, 为了绕开 Nielsen-Ninomiya 定理的假设, 它破坏了手征对称性。另外, Wilson 项对费米子裸质量  $m_0$  也存在较为复杂的重整化,  $m_R = Z_m(m_0 - m_c)$ 。故实现无质量费米子需要对  $r$  进行精细调节。

#### 3.2.2 Kogut-Susskind 交错费米子

第二种构造方式是 **Kogut-Susskind 交错费米子**。定义以下费米子场:

$$\psi'(x) = \gamma_0^{x_0} \gamma_1^{x_1} \gamma_2^{x_2} \gamma_3^{x_3} \psi(x), \quad (3.2.3)$$

则天真费米子的作用量将变换为

$$\sum_x \bar{\psi}'(x) \sum_\mu \eta_\mu(x) \frac{\psi'(x + \hat{\mu}) - \psi'(x - \hat{\mu})}{2}, \quad (3.2.4)$$

其中

$$\eta_0(x) = 1, \quad \eta_1(x) = (-1)^{x_0}, \quad \eta_2(x) = (-1)^{x_0+x_1}, \quad \eta_3(x) = (-1)^{x_0+x_1+x_2}. \quad (3.2.5)$$

注意到这里  $\eta_\mu(x)$  已经变为了纯数, 故表达式在旋量空间是对角的。所以只需要取  $\psi'(x)$  四个旋量分量中的一个作为费米子场 (将其记作  $\chi$ ):

$$S_{ST} = \sum_x \bar{\chi}(x) \sum_\mu \eta_\mu(x) \frac{\chi(x + \hat{\mu}) - \chi(x - \hat{\mu})}{2}. \quad (3.2.6)$$

可以预测，16 个加倍费米子在交错费米子构造下只剩下 1/4，即退化为 4 个 Dirac 费米子。具体来说，进行以下定义：

$$\begin{aligned} x_\mu &= 2h_\mu + s_\mu, s_\mu = 0, 1, \quad \Gamma^{(s)} = \gamma_0^{s_0} \gamma_1^{s_1} \gamma_2^{s_2} \gamma_3^{s_3}, \\ q(h)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{8} \sum_s \Gamma_{\alpha\beta}^{(s)} \chi(2h + s), \quad \chi(2h + s) = 2\text{Tr}[\Gamma^{(s)\dagger} q(h)]. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

这相当于扩大元胞面积到原本两倍，并且将元胞内 16 个相邻奇偶格点上的交错费米子场  $\chi$  合并为单个 16 分量场  $q$ 。交错费米子的作用量（式 (3.2.6)）可以用  $q$  表达为 [1]

$$S_{ST} = 16 \sum_h [\text{Tr}(\bar{q}(h) \gamma_\mu \nabla_\mu q(h)) - \text{Tr}(\bar{q}(h) \gamma_5 \Delta_\mu q(h) \gamma_\mu \gamma_5) + m_0 \text{Tr}(\bar{q}(h) q(h))]. \quad (3.2.8)$$

其中  $\nabla_\mu q(h) = \frac{1}{4}(q(h + \hat{\mu}) - q(h - \hat{\mu}))$ ,  $\Delta_\mu q(h) = \frac{1}{4}(q(h + \hat{\mu}) + q(h - \hat{\mu}) - 2q(h))$ 。如果将  $q$  的一个旋量指标视作 4 个 Dirac 费米子之间差异的自由度  $\tau$ （被称作“风味”[1]），另一个作为单个 Dirac 费米子的旋量指标  $\alpha$ ，即定义费米子场  $\phi_\alpha^{(\tau)}(h) = q(h)_{\alpha\tau}$ ，则

$$S_{ST} = 16 \sum_h \left[ \sum_\tau \bar{\phi}^{(\tau)}(h) (\gamma_\mu \nabla_\mu + m_0) \phi^{(\tau)}(h) - \sum_{\tau\tau', \mu} \bar{\phi}^{(\tau)}(h) \gamma_5 (\tau_5 \tau_\mu)_{\tau\tau'} \Delta_\mu \phi^{(\tau')}(h) \right]. \quad (3.2.9)$$

很容易看出第一项和天真费米子作用量，以及第二项和 Wilson 项的相似性。需要注意，第二项造成了不同风味 Dirac 费米子之间的混合，也就是仍然存在四个加倍子，但这一数量相比 16 个已经大大减少。

交错费米子作用量的优势在于，手征对称性仍然被保留，虽然形式为更弱的  $U(1) \otimes U(1)$ ：

$$\phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \phi'' = e^{i\beta \Gamma_5} \phi. \quad (3.2.10)$$

总而言之，Kogut-Susskind 交错费米子通过格点重排，将四分量的 Dirac 旋量分解为格点模式，将 16 个加倍态减少为 4 个（从而不违反 Nielsen-Ninomiya 定理），同时保留了较弱的手征对称性。其残余手征性比 Wilson 费米子高，且数值效率优于更复杂的构造，故广泛应用于格点 QCD 计算中。

### 3.2.3 畴壁费米子和重叠费米子

这两种方法的核心在于，用广义手征对称性，即 **Ginsparg-Wilson 关系** 代替  $\gamma_5$  对称性 ( $D = G^{-1}$ ):

$$\{\gamma_5, D\} = aD\gamma_5D. \quad (3.2.11)$$

通过修改定义，它绕开了 Nielsen-Ninomiya 定理的假设，从而可以在格点上构建单个具有精确  $\gamma_5$  手征对称性的费米子。

篇幅所限，本文仅简单介绍基于 Ginsparg-Wilson 关系的两种费米子构造。畴壁费米子引入了额外的第五维度，将手征费米子局域在两侧的畴壁上，加倍态沿第五维被指数抑制。

故低能谱中只剩下单个有效费米子，无加倍现象。一般来说，第五维度的尺度越大，畴壁费米子越符合 Ginsparg-Wilson 关系。

重叠费米子则是畴壁费米子的严格四维极限。其 Dirac 算符为

$$D_{ov} = 1 + \gamma_5 \text{sgn} H_W \quad (3.2.12)$$

其中  $H_W$  是 Wilson-Dirac 算符的 Hermitian 形式，重叠费米子严格满足 Ginsparg-Wilson 关系，因此具有格点上的严格手征对称性，不存在任何加倍态。但是重叠费米子的数值效率很低，所以一般不用于实际计算。

最后，我们通过表格比较这四种格点费米子的实现方案。

方案	如何避免Nielsen-Ninomiya定理	手征对称性	加倍处理
Wilson	破坏 $\gamma_5$ 手征对称性	破坏	全部抬升到高能区域
Kogut-Susskind交错	存在4个加倍子	保留但弱化为 $U(1) \otimes U(1)$	将 16 个减少到 4 个
畴壁	引入第五维度，修改手征定义为 Ginsparg-Wilson 关系	近似手征，在 $L_5 \rightarrow \infty$ 时精确	无加倍
重叠	修改手征定义为 Ginsparg-Wilson 关系	精确	无加倍

图 2: 四种格点费米子的实现方案。

## 4 总结

本文介绍了格点量子场论的基本理论，包括格点标量场、规范场和费米子场。对于规范场，我们定义了 Wilson 圈以及以之为变量的格点规范场论，并用其讨论了 QCD 夸克禁闭和退禁闭问题。对于费米子场，我们介绍了费米子加倍现象，Nielsen-Ninomiya 定理，以及相应的解决方案。

## 参考文献

- [1] 刘川. 格点量子色动力学导论. 北京大学出版社, 2017.
- [2] David Tong. Gauge theory. *Lecture notes, DAMTP Cambridge*, 10(8):74, 2018.
- [3] Kenneth G. Wilson. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D*, 10:2445–2459, Oct 1974.
- [4] Mehran Kardar. *Statistical physics of fields*. Cambridge University Press, 2007.
- [5] N. D. Mermin. The topological theory of defects in ordered media. *Rev. Mod. Phys.*, 51:591–648, Jul 1979.