Bethe Ansatz
平衡态统计物理讨论班

林沛晗

北京大学物理学院

2025 年 4 月 28 日

Feynman's Blackboard

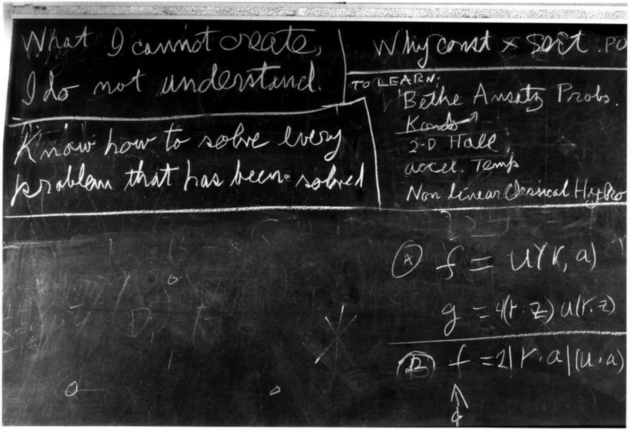

图 1: Feynman 去世前黑板上"To Learn" 部分第一条就是 Bethe ansatz。

Hans Bethe

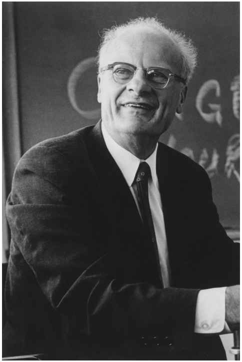

图 2: Hans Bethe (1906-2005)，德裔美籍物理学家，1967 年因恒星的碳氮氧循环获诺贝尔物理学奖，除此之外在物理学的各个领域都做出了重要贡献。被他的学生 Dyson 称为“20 世纪最伟大的问题解决者”。

历史回顾

- Ansatz（拟设）：来自德语，意为“初次尝试”。
- 先通过物理直觉或数学观察假设答案的形式，再证明答案是正确的。
- 一般只能找到特解，但是对于很多问题特解已经足够。
- 例：待定系数法、分离变量法、变分法.etc

1931 年，Bethe 通过拟设多体波函数的形式，解决了一维 Heisenberg 链的本征态问题。他假设的波函数形式也被称作Bethe ansatz。

历史回顾

Bethe ansatz 的一些应用：

- 一维自旋链（Bethe 1931, Orbach 1958, Yang and Yang 1966）
- 一维 Hubbard 模型（Lieb and Wu 1968）
- Kondo 模型和 Anderson 模型（Andrei 1980, Vigman 1980）
- 一维费米子/玻色子相互作用气体（Lieb and Liniger 1963, Yang and Yang 1967, Yang and Yang 1969）
- 以及很多能够映射到一维系统的模型，如可积 AdS/CFT[1]

可以看到，Bethe ansatz 的适用范围主要是一维系统。更本质的限制是可积性，即 S 矩阵满足 Yang-Baxter 方程。

[1] https://www.zhihu.com/question/28739278/answer/137003737

动机

为何 Bethe ansatz 如此重要？

- 对于大部分多体系统，解析解极为困难。所以一维情况下由 Bethe ansatz 给出的解析解极为宝贵。
- 在一维问题中由于经典的或量子的涨落，平均场理论等近似通常不适用。此时解析解可以用于验证不同近似的正确性，也可以启发对高维的模型进行正确的近似。

本征态解

考虑一维自旋 $\frac{1}{2}$ 的 Heisenberg 链，链长为 L，哈密顿量为（取周期性边界条件）:

$$H = J\sum_i \left[S_i^z S_{i+1}^z + \frac{1}{2}(S_{j+1}^+ S_j^- + S_{j+1}^- S_j^+)\right] \qquad (1)$$

记完全磁化的状态为 $|\mathrm{FM}\rangle$。其能量本征值为 $E_0 = \frac{LJ}{4}$。[2]

一般的状态可以写作相对 $|\mathrm{FM}\rangle$ 的 N 个自旋翻转。定义波函数 $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$，对应的自旋态为

$$|\psi\rangle = \sum_{x_1,\ldots,x_N=1}^{L} \psi(x_1,\ldots,x_N) S_{x_1}^- S_{x_2}^- \cdots S_{x_N}^- |\mathrm{FM}\rangle \qquad (2)$$

[2] $|\mathrm{FM}\rangle$ 是本征态，但只对 $J<0$ 为基态。

本征态解

首先考虑 $N=1$ 的情况，或 $\psi(x)$。将 H 作用于其上结果为

$$E\psi(x)=H\psi(x)=E_0\psi(x)-J\psi(x)+\frac{J}{2}(\psi(x-1)+\psi(x+1)) \quad (3)$$

假设$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{ikx}$，其中周期性边界条件要求 $k=\frac{2\pi n}{L}$，那么 $E=J(\cos k-1+\frac{L}{4})$。

本征态解

其次考虑 $N=2$，此时在 $|x_1-x_2|\gg 1$ 时，波函数形式为平面波。但当两个“粒子”互相接近时，它们会发生碰撞和动量交换。在这一过程中“能量”和“动量”守恒，所以要求
$k_1'=k_1, k_2'=k_2$ 或 $k_1'=k_2, k_2'=k_1$。[3]
可以假设

$$\psi(x_1,x_2)=\alpha\, e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}+\beta\, e^{i(k_1x_2+k_2x_1)} \tag{4}$$

周期性边界条件要求 $\psi(x_1,x_2)=\psi(x_2,x_1+L)$。[3] 所以

$$\frac{\alpha}{\beta}=e^{ik_1L} \quad k_1+k_2=\frac{2\pi n}{L} \tag{5}$$

[3]请注意，只有一维系统有这样简洁的条件！

本征态解

将 H 作用在 $\psi(x_1, x_2)$ 上。当 $|x_1 - x_2| \neq 1$ 时，

$$H\psi(x_1,x_2) = (E_0 - 2J)\psi(x_1,x_2)$$
$$+\frac{J}{2}(\psi(x_1,x_2+1)+\psi(x_1,x_2-1)+\psi(x_1+1,x_2)+\psi(x_1-1,x_2)) \tag{6}$$

而 $|x_1 - x_2| = 1$ 时，某些自旋翻转是不可能的。可以验证

$$H\psi(x,x+1) = (E_0 - J)\psi(x,x+1) + \frac{J}{2}(\psi(x-1,x+1)+\psi(x,x+2)) \tag{7}$$

将 $x_1 = x, x_2 = x+1$ 直接代入 (6) 并和 (7) 比较，可以发现

$$J\psi(x,x+1) = \frac{J}{2}(\psi(x,x)+\psi(x+1,x+1)) \tag{8}$$

本征态解

所以 $N=2$ 的解为

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= -\frac{e^{i(k_1-k_2)/2}-\cos(k_1+k_2)/2}{e^{-i(k_1-k_2)/2}-\cos(k_1+k_2)/2} \\ &= -e^{i\theta(k_1,k_2)} \\ Lk_1 &= 2\pi(n_1+\frac{1}{2})+\theta(k_1,k_2) \\ Lk_2 &= 2\pi(n_2+\frac{1}{2})+\theta(k_2,k_1)\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\theta(k_1,k_2)=-\theta(k_2,k_1)$，可以理解为散射相移。虽然波函数是平面波的形式，但两个“粒子”的动量是关联的。

本征态解

接下来考虑一般的 N。我们直接假设波函数为

$$\psi = \sum_P A_P \exp\left[i \sum_{i=1}^{N} k_{Pj} x_j\right] \tag{10}$$

其中 P 为 N 阶置换群的元素。和 $N = 2$ 类似，要求

$$2\psi(\ldots, x_k, x_k{+}1, \ldots) = \psi(\ldots, x_k{+}1, x_k{+}1, \ldots) + \psi(\ldots, x_k, x_k, \ldots) \tag{11}$$

对于每个 P，都可定义 $P' = P_{k,k+1}P$。那么

$$\psi(\ldots, x_k + m, x_k + n, \ldots) = \sum_P{}' e^{i\sum_{j\neq k,k+1} k_{Pj}x_j}\, e^{i(k_{Pk}+k_{P'k})x_k} \cdot \left(A_P\, e^{i(mk_{Pk}+nk_{P'k})} + A_{p'}\, e^{i(mk_{P'k}+nk_{Pk})}\right) \tag{12}$$

其中求和遍及所有 $Pk < P(k+1)$ 的置换。

本征态解

那么

$$2(A_P e^{ik_{P'k}} + A_{P'} e^{ik_{Pk}}) = (A_P + A_{P'})(1 + e^{i(k_{Pk}+k_{P'k})})$$
$$\frac{A_P}{A_{P'}} = -e^{i\theta(k_{Pk},k_{P'k})} \tag{13}$$

其中 θ 和 (9) 定义相同。这是对 (9) 的推广。

周期性条件要求 $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \psi(x_2, \ldots, x_N, x_1 + L)$。定义 P'' 使 $(PN, P1, \ldots, P(N-1)) = (P''1, P''2, \ldots, P''N)$，则

$$\frac{A_P}{A_{P''}} e^{ik_{P''1}L} = 1 \tag{14}$$

P'' 可通过 P 进行 $N-1$ 次置换得到。应用 (13)，得知

$$(-1)^{N-1} \exp(i \sum_{j=1}^{N} \theta(k_j, k_k)) e^{ik_k L} = 1 \tag{15}$$

本征态解

也即（I_i 为整数当 N 为奇数，为半整数当 N 为偶数）：

$$Lk_i = 2\pi I_i + \sum_j \theta(k_i, k_j) \tag{16}$$

对应的总能量为

$$E = \frac{JL}{4} - J\sum_{i=1}^{N}(1 - \cos k_i) \tag{17}$$

总动量为

$$P = \sum_{i=1}^{N} k_i \tag{18}$$

基态与激发态

基态应当最小化总能量 E。

- 对于铁磁耦合，$J<0$，所以要求所有 $1-\cos k_i=0$（即 $k_i=0$），且 $N=0$（无自旋翻转）。这说明 $|\mathrm{FM}\rangle$ 为铁磁耦合的基态。
- 对于反铁磁耦合，应有 $k_i=\pi$，且 N 取极大值。但 (16) 给出的约束使问题复杂化。严格结果由杨振宁和 Chen-Ping Yang 给出，他们证明了基态有 $N=\dfrac{L}{2}$，没有净磁矩。

基态与激发态

下面通过具体计算得出基态和激发态的性质。令 $\lambda = \frac{1}{2}\cot\frac{k}{2}$，那么

$$2\pi I_i' = 2L\arctan(2\lambda_i) - 2\sum_j \arctan(\lambda_i - \lambda_j) \tag{19}$$

定义 RHS $= \Phi(\lambda_i)$，那么 $\Phi(\lambda_i) = 2\pi I_i'$。由于 $-\Phi_0 < \Phi < \Phi_0$（其中 $\Phi_0 = \pi(L-N)$），所以有 $L-N$ 个根。我们应取其中的 N 个根作为真实粒子的参数。

对于反铁磁基态，$N = \frac{L}{2}$，所以根的选择只有一种方案。在热力学极限下，可定义根的密度[4]：

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\lambda} \tag{20}$$

[4]相当于 $1/\Delta\lambda$

基态与激发态

那么将求和连续化为积分：

$$\Phi(\lambda) = 2L\arctan(2\lambda) - 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda'\rho(\lambda')\arctan(\lambda-\lambda') \qquad (21)$$

对其求导即为 $\rho(\lambda)$。所以 $\rho(\lambda)$ 满足卷积积分方程：

$$2\pi\rho(\lambda) = \frac{4L}{1+4\lambda^2} - 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda' \frac{\rho(\lambda')}{1+(\lambda-\lambda')^2} \qquad (22)$$

其解为 $\rho(\lambda) = \dfrac{L}{2\cosh(\pi\lambda)}$，是中心位于 $\lambda = 0$（$k=\pi$）的有限展宽函数。这表明基态仍然接近 Neel 态，但存在量子涨落。

基态与激发态

反铁磁的基态能量 (17) 为

$$\begin{aligned} E &= \frac{LJ}{4} - J\sum_j (1-\cos k_j) \\ &= \frac{LJ}{4} - J\sum_j \frac{2}{1+4\lambda_j} \\ &= \frac{LJ}{4} - J\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda)\frac{2}{1+4\lambda} \\ &= JL(\frac{1}{4} - \ln 2) \approx -0.443JL \end{aligned} \tag{23}$$

这一结果小于经典的 Neel 态能量 $E_N = -\frac{JL}{4}$，展示了量子涨落的作用。

基态与激发态

最后考虑激发态的性质。对于 $N < \dfrac{L}{2}$，必然有根不出现在 (19) 的求和之中。类似地定义其密度为 $\rho_h(\lambda)$，那么

$$2\pi\rho(\lambda) = \frac{4L}{1+4\lambda^2} - 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda' \frac{\rho(\lambda') - \rho_h(\lambda')}{1+(\lambda-\lambda')^2} \tag{24}$$

解为

$$\begin{gathered} \rho(\lambda) = \rho_0(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda' \rho_h(\lambda')\phi(\lambda-\lambda') \\ \rho_0(\lambda) = \frac{L}{2\cosh(\pi\lambda)} \quad \phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \frac{e^{-i\lambda\xi}}{1+e^{|\xi|}} \end{gathered} \tag{25}$$

基态与激发态

系统的激发能量为

$$\Delta E = -J\int_{-\infty}^{\infty}(\rho-\rho_0-\rho_h)\frac{2}{1+4\lambda}\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\rho_h(\lambda)\epsilon(\lambda)\mathrm{d}\lambda \quad (26)$$

$$\begin{aligned}\epsilon(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda'(\delta(\lambda-\lambda')-\phi(\lambda-\lambda'))\cdot\frac{2J}{1+4\lambda'^2} \\ &= \frac{\pi J}{2\cosh\pi\lambda}\end{aligned} \quad (27)$$

$\epsilon(\lambda)$ 即为单粒子激发能量。类似地，单粒子激发动量为

$$\begin{aligned}q(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda'(\delta(\lambda-\lambda')-\phi(\lambda-\lambda'))2\arctan(2\lambda') \\ &= \arctan(\sinh\pi\lambda)\end{aligned} \quad (28)$$

基态与激发态

那么单粒子激发谱为（称作自旋子(spinon) 谱）:

$$\epsilon = \frac{\pi J}{2} \cos q \tag{29}$$

- 由于 $\epsilon > 0$，要求 $|q| < \dfrac{\pi}{2}$，所以布里渊区被折叠。其物理意义见图3。
- 激发谱是无能隙(gapless) 的。事实上这是半整数自旋 Heisenberg 模型的一般特征（Haldane 猜想）。

我们熟知的单自旋翻转实际上为两个 spinon 的叠加（称为磁振子 (magnon)）。其物理意义见图4。

基态与激发态

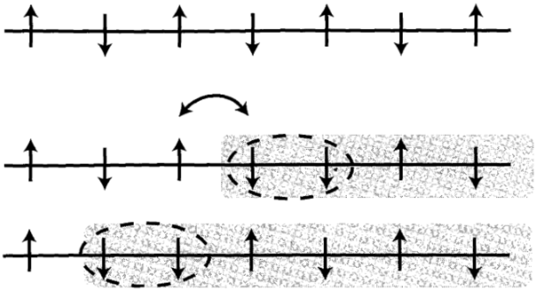

图 3: spinon 激发的示意图，可将其理解为畴壁的形成。自旋翻转哈密顿量使畴壁一次性移动两个晶格，即晶格周期变为 2.

基态与激发态

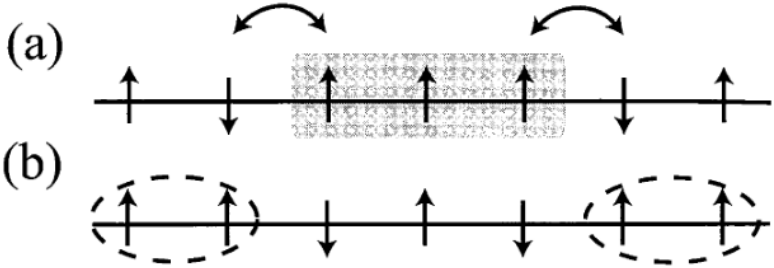

图 4: magnon 激发的示意图。一个翻转的自旋变为相反方向传播的两个 spinon。

第二部分总结

在此部分中，我们使用了 Bethe ansatz 求解了一维 Heisenberg 链的所有本征态。

- Bethe ansatz 的波函数：$\psi = \sum_P A_P \exp(i \sum_j k_{Pj} x_j)$。
- 本征态由 N 个准粒子动量标记。它们满足 $Lk_i = 2\pi I_i + \sum_j \theta(k_i, k_j)$。
- 对于铁磁耦合，基态为完全极化态。
- 对于反铁磁耦合，基态净磁矩仍为 0，但具体状态为一系列自旋翻转的叠加。
- 反铁磁耦合的元激发是 spinon，对应畴壁的形成。[5]

[5] 在高维问题中也存在 spinon，但和现在讨论的概念不同。见https://www.zhihu.com/question/473363778/answer/2059700369。

1. 历史回顾和动机
2. 一维 Heisenberg 链的严格解
3. **Bethe ansatz 和数学物理**
4. 总结

Lyudvig Faddeev

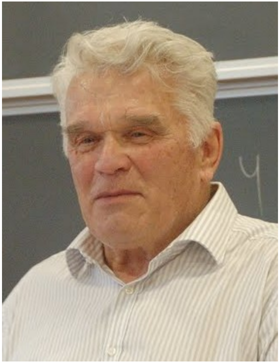

图 5: Lyudvig Faddeev (1934-2017)，苏联数学物理学家，列宁格勒学派的领导者。贡献包括非阿贝尔规范场的量子化（Faddeev-Popov Ghost），三体问题的 Faddeev 方程，以及下面将会提到的“量子逆散射方法”。

Bethe ansatz 和量子可积性

- 经典可积：对于 n 自由度系统，存在 $2n$ 个独立的物理量[6]，他们之间泊松括号为 0，且和哈密顿量的泊松括号也为 0。
- 量子可积：存在无穷多个[7]独立的物理量，它们之间互相对易，且和哈密顿量对易。
- 接下来将会看到，Bethe ansatz 满足 Yang-Baxter 方程，从而可以通过“量子逆散射方法”构造无穷多个独立的守恒量。[8]所以，如果系统可以通过 Bethe ansatz 求解，那么它一定是量子可积的。

[6]定义为 $\mathrm{d}Q_1 \wedge \mathrm{d}Q_2 \cdots \wedge \mathrm{d}Q_{2n} = 0$。
[7]在热力学极限下。
[8]虽然这些守恒量可能是高度非局域的。

Yang-Baxter 方程和守恒量的构造

Yang-Baxter 方程 (YBE)：两体散射矩阵元满足的关系

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \tag{30}$$

很显然，对于 Bethe ansatz，$\frac{\alpha}{\beta} = -e^{i\theta(k_1,k_2)}$ 满足 Yang-Baxter 条件。

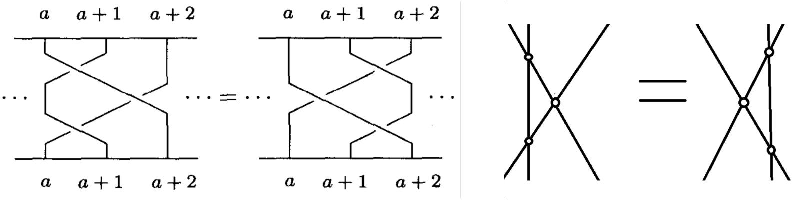

图 6: YBE 的图示：（左）纽结理论（右）更简洁的形式

Yang-Baxter 方程和守恒量的构造

定义透射矩阵（对应被 L 个粒子散射的振幅）:

$$T_a = R_{a,L} R_{a,L-1} \cdots R_{a,2} R_{a,1} \tag{31}$$

对于满足 YBE 的散射矩阵，可以证明 RTT 关系:

$$R_{ab} T_a T_b = T_b T_a R_{ab} \tag{32}$$

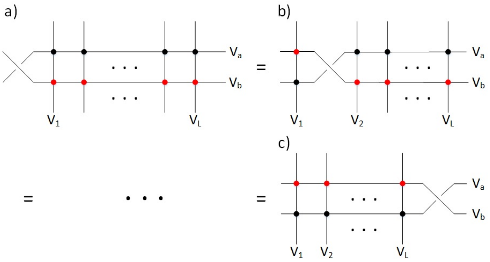

图 7: RTT 关系的几何说明

Yang-Baxter 方程和守恒量的构造

应用这一性质，定义 $t(\lambda) = \mathrm{Tr}_a T_a(\lambda)$[9]。由于 $R_{ab}(\lambda-\lambda')T_a(\lambda)T_b(\lambda')R^{-1}_{ab}(\lambda-\lambda') = T_b(\lambda')T_a(\lambda)$，则

$$[t(\lambda), t(\lambda')] = 0 \tag{33}$$

在 $\lambda = 0$ 附近展开 $\ln t(\lambda)$：

$$\ln t(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n \lambda^n \tag{34}$$

则 $[J_n, J_m] = 0$。事实上，J_1 即为哈密顿量。所以 $J_{n>1}$ 为更高阶的守恒量。这一序列理论上可以无穷延伸，这样就找到了几乎无穷多个守恒量。它们实际上是无穷维 Yangian 代数的中心荷。

[9] 此处 λ 为动量等量子数。

Yang-Baxter 方程和守恒量的构造

- 物理上，Yang-Baxter 方程本质要求多个准粒子的散射矩阵能够约化为两体散射的乘积。
- 对于全同粒子，两体散射前后只会互换动量或保持动量不变，所以系统的波函数可以由参数 $k_1, \cdots k_N$ 描述。
- 这样至少可以构造 N 个独立的守恒量，其本征值为

$$I_n = \sum_{j=1}^{N} k_j^n \quad 1 \leq n \leq N \tag{35}$$

- 那么系统一定是可积的。

使用 Yang-Baxter 方程构造守恒量的方法被 Faddeev，Takhtajyan 和 Reshetikhin 等人发展为“量子逆散射方法”（Quantum inverse scattering method）。使用这一形式可以很方便地进行 Bethe ansatz 计算（即代数 Bethe ansatz）。

总结

- Bethe ansatz 作为一维系统严格解的重要出发点，是数学物理和实验观测的桥梁。
- Bethe ansatz 的本质是可积性，而可积系统大多数是一维系统。另一方面，理论上的确存在高维的可积系统，但通常不对应真实的物理模型。这也是 Bethe ansatz 扩展到高维模型的主要困难。

参考文献：

- T. Giamarchi, Quantum Physics in One Dimension, 2003
- L. D. Faddeev, Algebraic Aspects of Bethe-Ansatz, 1994
- D. R. M. Rincon, More About the Yang Baxter Equation, 2013

Thanks!