北京大學
PEKING UNIVERSITY

铜基超导理论

汇报人 林沛晗

目录

CONTENTS

北京大學
PEKING UNIVERSITY

PART 1

铜基超导体的物性

1.1 实验发现

北京大学 PEKING UNIVERSITY

- 1960s Matthias：$\mathrm{Nb_3Si}$，$\mathrm{Nb_3Ge}$中18K和27K的T_c。
- 进一步提高转变温度?
- 1970s：$\mathrm{ABO_3}$超导

超导不来源于BCS的电子-声子相互作用，而是电子-电子相互作用!

- 1986年，Bednorz和Müller发现了La-Ba-Cu-O化合物中$T_c = 35K$
- 1987年，朱经武和赵忠贤在$\mathrm{YBa_2Cu_3O_{7-y}}$中发现了$T_c \geq 90K$（液氮温区）
- 1988年，$\mathrm{Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10+x}}$和$\mathrm{Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}}$中发现了$T_c = 110K, 125K$

- 以上统称铜基超导体。

1.1 实验发现

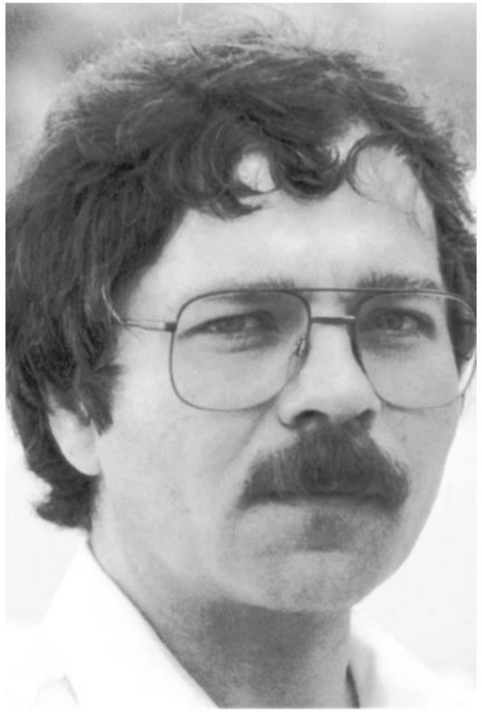


Photo from the Nobel Foundation archive.

J. Georg Bednorz

Prize share: 1/2

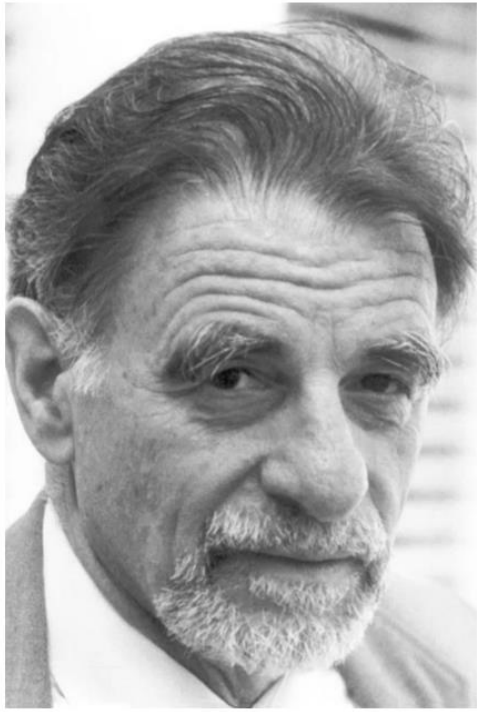
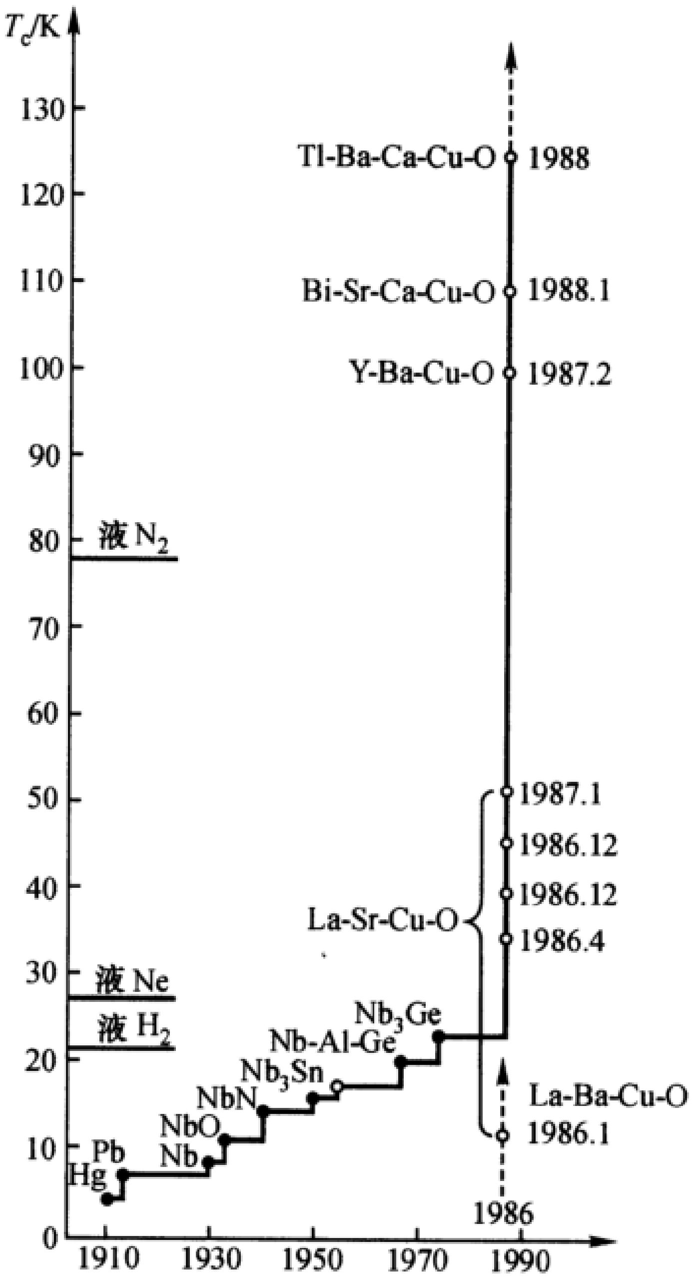


Photo from the Nobel Foundation archive.

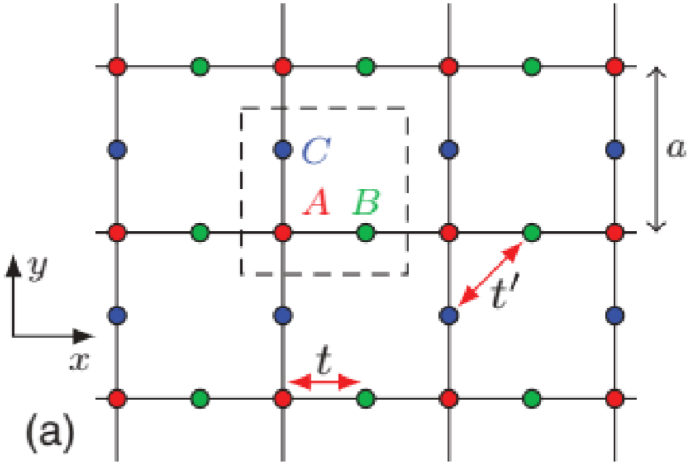
K. Alexander Müller

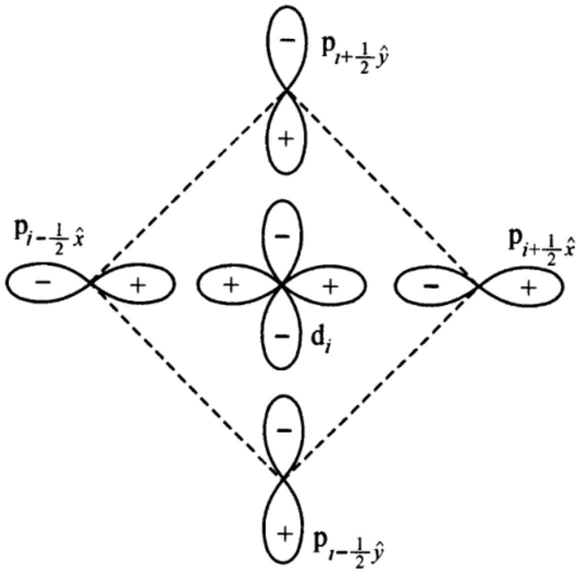
Prize share: 1/2

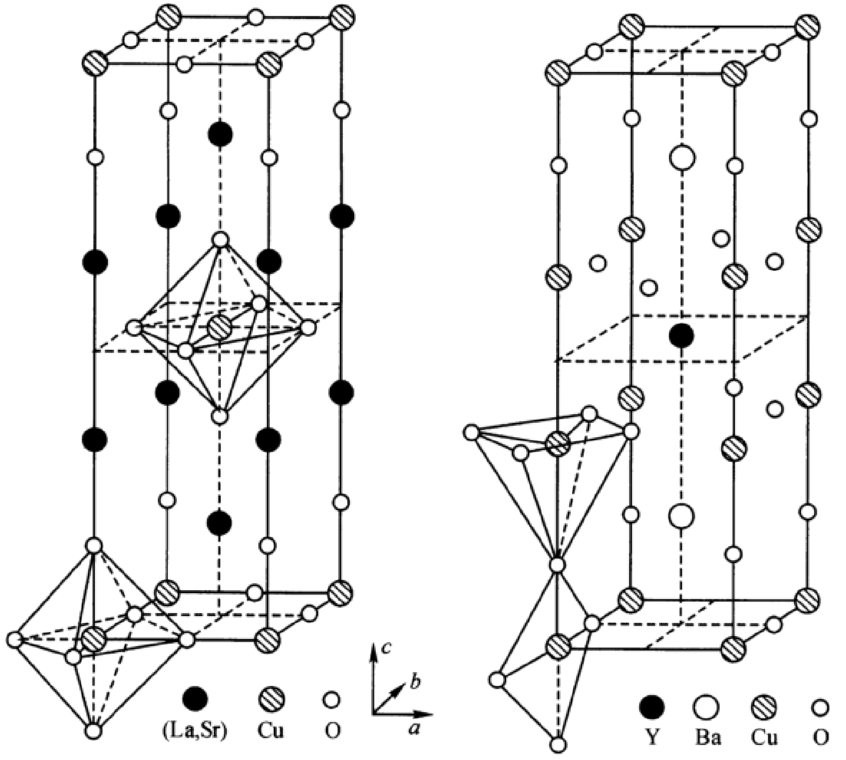


1.2 微观结构和相图

- 统一结构：CuO_2层-电荷库-CuO_2层
- CuO_2是载流子运动层
  - 二维正方晶格，Cu的d轨道，O的p轨道

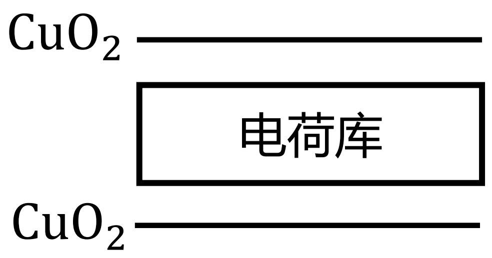




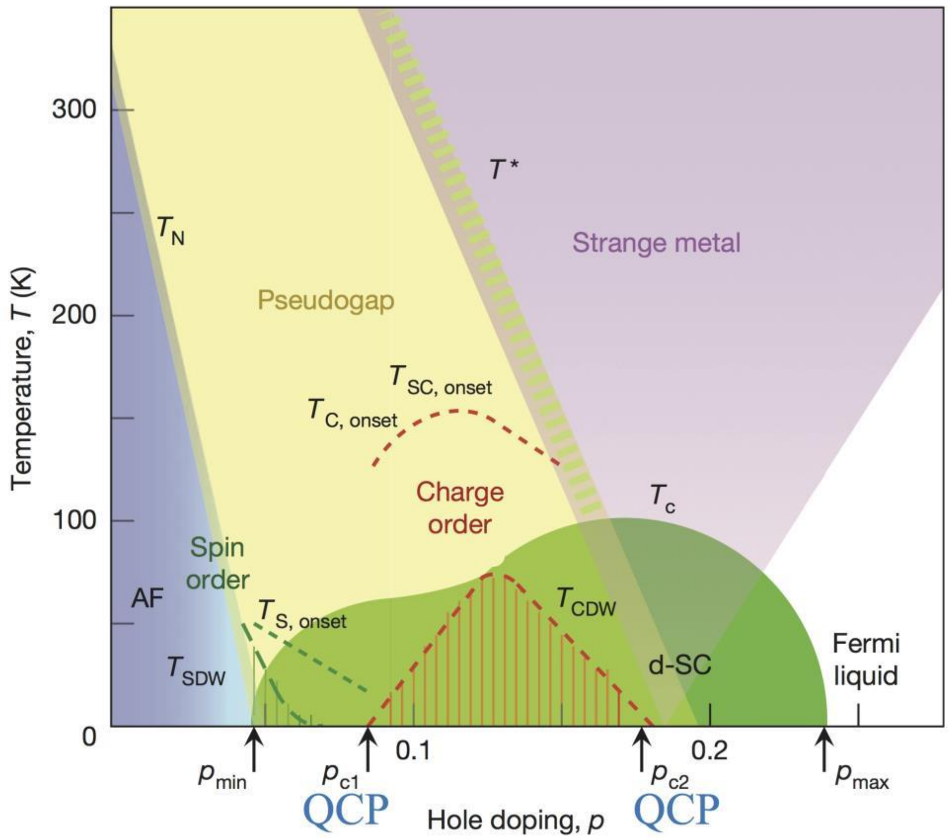


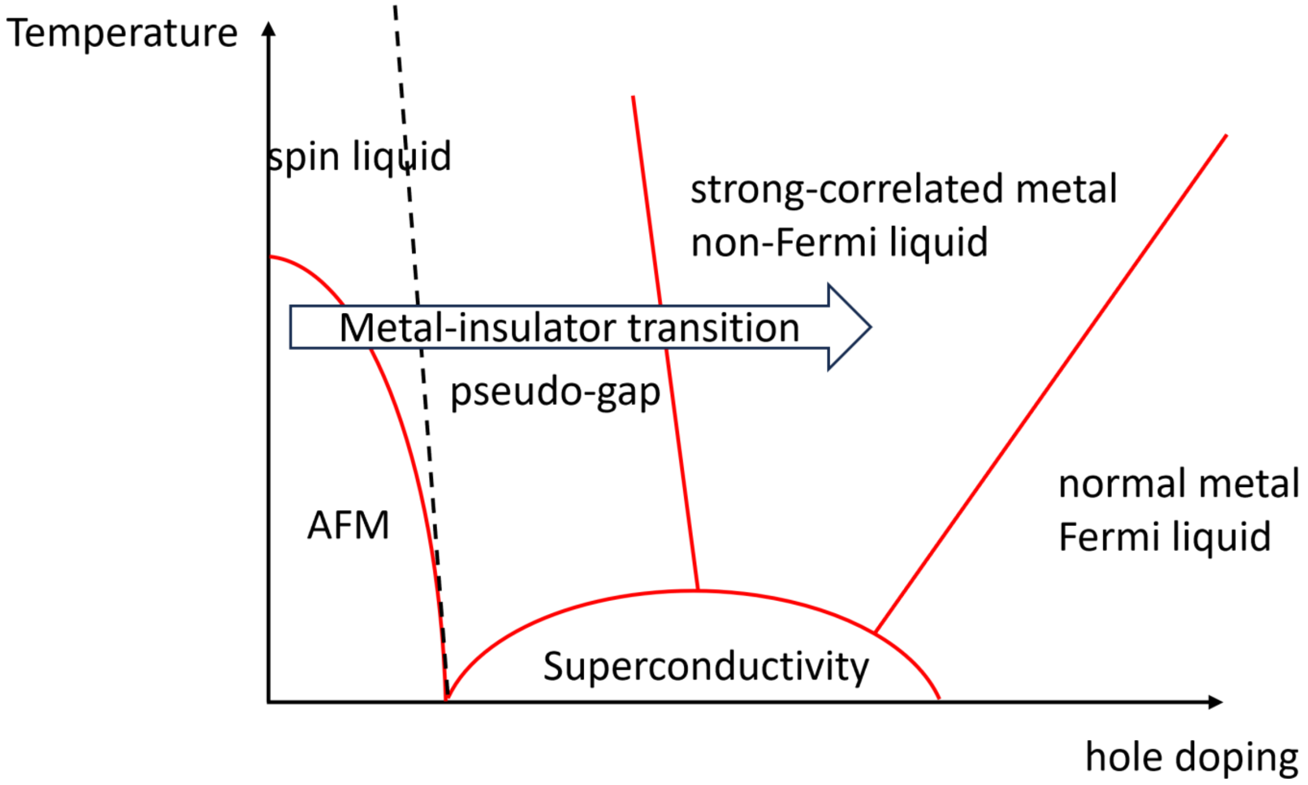
(a) $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ (La−214)

(b) $YBa_2Cu_3O_{6+x}$ (Y−123)



- 铜基超导体相图

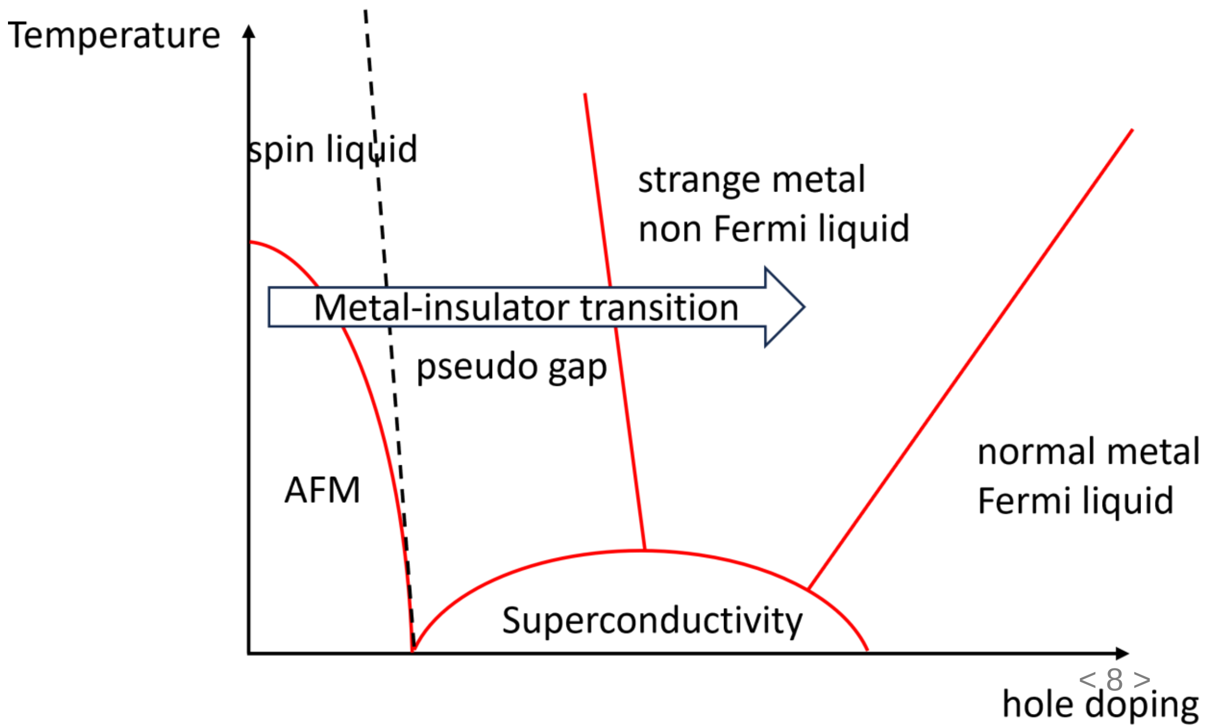

Temperature, T (K)
300
200
100
0
T_N
Pseudogap
T^*
Strange metal
$T_{SC, onset}$
$T_{C, onset}$
Charge order
T_c
Spin order
AF
$T_{S, onset}$
T_{CDW}
T_{SDW}
d-SC
Fermi liquid
0.1
0.2
p_{min}
p_{c1}
QCP
Hole doping, p
p_{c2}
QCP
p_{max}


Temperature
spin liquid
strong-correlated metal
non-Fermi liquid
Metal-insulator transition
pseudo-gap
AFM
normal metal
Fermi liquid
Superconductivity
hole doping

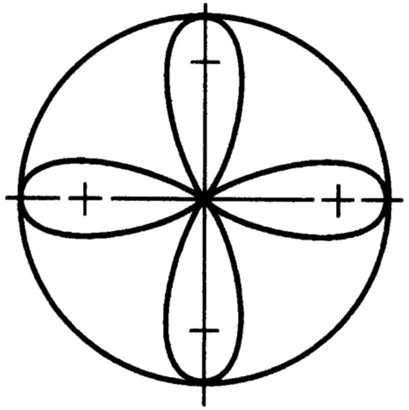
1.2 微观结构和相图

- 母体为反铁磁绝缘体，在微弱掺杂下奈耳温度骤降
- 加大掺杂，出现赝能隙态（弱掺杂区）和奇异金属/非费米液体态（过掺杂区）
- 降温得到超导态
- 继续掺杂，变为费米液体，无超导

- 理论的复杂性



1.3 超导态性质



- 超导态仍然为库珀对
- d波配对：能隙函数$\Delta(k) \propto k_x^2 - k_y^2$
    - Cu原子平面内$d_{x^2-y^2}$轨道
- d波配对的微观理论：仍然考虑库珀不稳定性的问题，在相对坐标下

$$-\frac{\hbar^2}{m}\nabla^2\psi(r) + V(r)\psi(r) = E\psi(r)$$

$$(2E_k - E)\psi(k) = -\sum_{k'} V(k-k')\psi(k')$$

- 由于$k, k' \sim k_F$，势能可以在角度方向按照勒让德函数展开

$$V(k-k') = \sum_l (2l+1)V_l P_l(\cos\theta_{kk'}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} V_l Y_l^{m*}(\theta',\phi')Y_l^m(\theta,\phi)$$

1.3 超导态性质

北京大学 PEKING UNIVERSITY

- 对于$\psi(k)=f(\mathbf{k})Y_l^m(\theta_k,\phi_k)$，有

$$(2E_{\mathbf{k}}-E)f(\mathbf{k})=-V_l\sum_{\mathbf{k}'}f(\mathbf{k}')$$

$$1=-V_l\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2E_k-E}=-g(0)V_l\ln\left(\frac{2\hbar\omega_0-E}{-E}\right)$$

- 如果$V_l<0$，则形成束缚态

$$E=-\frac{2\hbar\omega_0}{e^{\frac{1}{g(0)|V_l|}}-1}$$

- $|V_l|$越大E越小，则配对角动量=势能分波项主导角动量
  - 电声耦合，s波主导
  - 其他玻色子，p/d波主导

1.3 超导态性质

- d波超导的准BCS理论：在BCS channel中decouple

$$H=\sum_k \epsilon_k\left(c_k^\dagger c_k+c_{-k}^\dagger c_{-k}\right)-\left(\Delta_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger+\Delta_k^* c_{-k}c_k\right)$$

- 自洽方程：

$$\Delta_k=-\sum_{k'}V(k,k')\langle c_{-k'}c_{k'}\rangle=-\frac{1}{2}\sum_{k'}V(k,k')\Delta(k',T)\frac{\mathrm{th}\frac{\beta\xi_{k'}}{2}}{\xi_{k'}}$$

- 在分波近似下

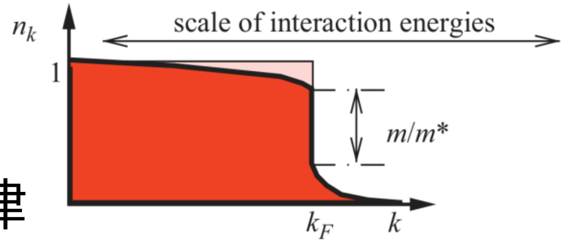
$$1=\frac{1}{2}|V_l|\sum_{k'}\frac{4\pi\left|Y_l^m(\hat{k}')\right|^2\mathrm{th}\frac{\beta\xi_{k'}}{2}}{\xi_{k'}},\qquad \xi_k=\sqrt{\epsilon_k^2+4\pi\Delta^2(T)\left|Y_l^m(k)\right|^2}$$

- 超导转变温度

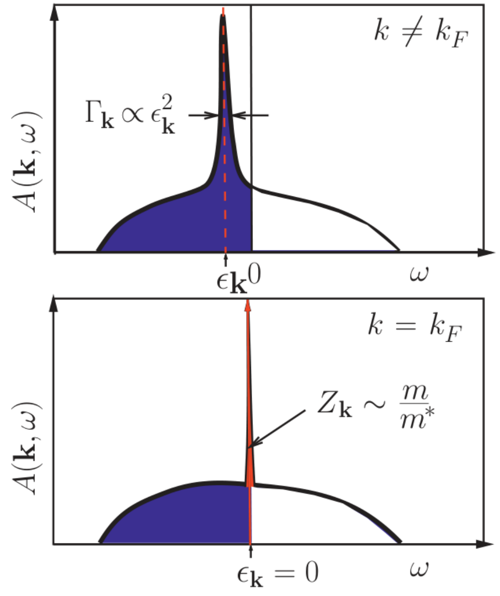
$$k_BT_c=1.13Q\hbar\omega_0 e^{-\frac{1}{g(0)|V_l|}}\quad(Q\sim1)$$

1.4 正常态性质

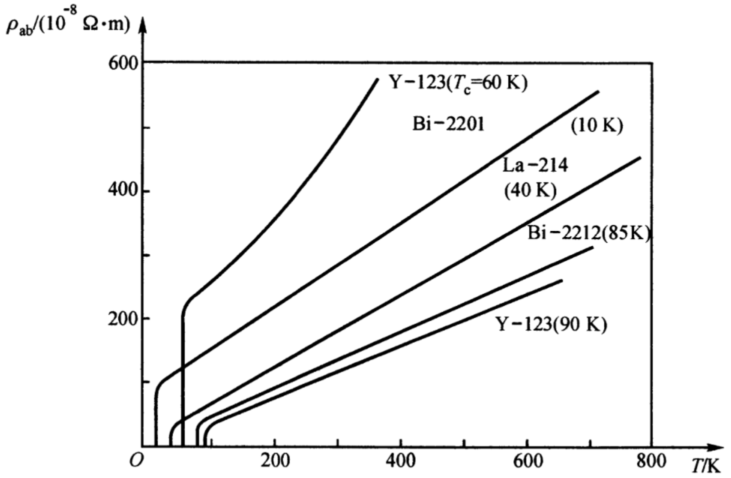
- 费米液体
  - 具有相互作用的系统也可能有费米面，判据为其附近准粒子分布有一个明显的跃变。
  - 具有费米面的系统统称为费米液体（Landau，1956）



- 铜基超导在过掺杂的正常区显现出非费米液体行为
  - 电阻率在几乎所有温区均为$aT+b$，而费米液体高温电阻饱和，低温T^5定律
  - 准粒子寿命$\mathrm{Im}\Sigma(\omega)\propto\omega$，而费米液体$\mathrm{Im}\Sigma(\omega)\propto\omega^2$
  - 核自旋弛豫$\tau^{-1}\propto T$，而费米液体$\tau^{-1}\propto T^{-1}$

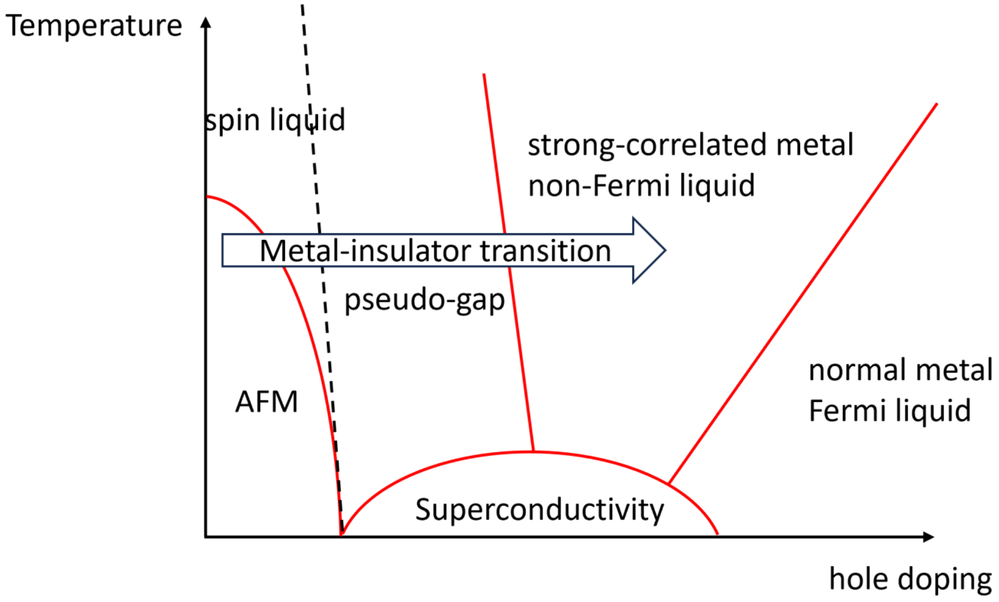


- 不能用费米液体理解正常态
  - BCS超导体基于良好定义的费米面



1.4 正常态性质

- 弱掺杂区的**赝能隙**（pseudo-gap）
- 在温度$T_p > T_c$时，准粒子能谱已经出现了**d波能隙Δ**，但此时**电阻率不为0**
  - 在降低温度（甚至越过T_c）时，能隙几乎不变化
- 这严重违反了BCS理论。
  - Anderson认为虽然存在库珀对，但已经不是BCS理论了。



PART 2

铜基超导的平均场理论

2.1 从Hubbard模型到t-J模型

- Hubbard模型

$$H=-t\sum_{\langle ij\rangle,\sigma}c_{i\sigma}^{\dagger}c_{j\sigma}+U\sum_{i}c_{i\uparrow}^{\dagger}c_{i\downarrow}^{\dagger}c_{i\downarrow}c_{i\uparrow}$$

- U~3eV，t~0.4eV，则U>>t
- 在$U\to\infty$极限下，每个格点上能量本征值为0和U，对应空占据/单占据和双占据情况。
- 有效理论可以将高能过程的后者投影掉。
- 对于哈密顿量本征值问题$\begin{pmatrix}H_{00} & H_{01}\\ H_{10} & H_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix}$，可以化简为

$$(H_{00}+H_{01}(E-H_{11})^{-1}H_{10})\psi_1=E\psi_1$$

- 假设$H_{01}\ll H_{00}$，则可将$(E-H_{11})^{-1}\to(E_0-E_1)^{-1}$，那么

$$H_{00}'=H_{00}+\frac{1}{E_0-E_1}H_{01}H_{10}$$

2.1 从Hubbard模型到t-J模型

- 定义$P=\prod_i(1-n_{i\uparrow}n_{i\downarrow})$（Gutzwiller），$Q=1-P$为两个正交投影算符
- 由于Hubbard项处于Q子空间中，则

$$\tilde{c}_{i\sigma}^{\dagger}=(1-n_{i\bar{\sigma}})c_{i\sigma}^{\dagger} \quad \tilde{c}_{i\sigma}=c_{i\sigma}(1-n_{i\bar{\sigma}})$$

$$H_{eff}=PTP-\frac{1}{U}PTQ\cdot QTP$$

$$\boldsymbol{S}_i=\frac{1}{2}\sum_{ss'}c_{is}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}_{ss'}c_{is'} \quad J=\frac{4t^2}{U}$$

- 有效哈密顿量为t-J Hamiltonian（Spalek, 1977）：

$$H_{eff}=-t\sum_{ij\sigma}(\tilde{c}_{i\sigma}^{\dagger}\tilde{c}_{j\sigma}+h.c.)+J\sum_{ij}\left(\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j-\frac{1}{4}n_in_j\right)$$

- Hubbard模型的**强关联极限**

- 半满填充：第一项为0→反铁磁基态
- Hole doping：第一项随着δ增加→跃迁项和反铁磁项竞争

2.2 t-J模型的平均场理论

- 定义双占据态$|2\rangle$，无占据态$|0\rangle$，则格点产生算符

$$c_{i\sigma}^{\dagger}=|\sigma\rangle_i\langle 0|+\sigma|2\rangle_i\langle\bar{\sigma}|,\qquad c_{i\sigma}=|0\rangle_i\langle\sigma|+\sigma|\sigma\rangle_i\langle 2|$$

- 投影掉$|2\rangle$，$\tilde{c}_{i\sigma}^{\dagger}=|\sigma\rangle_i\langle 0|$，$\tilde{c}_{i\sigma}=|0\rangle_i\langle\sigma|$，$\tilde{c}_{i\sigma}^{\dagger}\tilde{c}_{i\sigma}=|\sigma\rangle_i\langle\sigma|$，不满足费米子反对易关系
- 隶玻色子（slave boson）表示（Piers Coleman, 1983）：

$$|0\rangle=b^{\dagger}|\Omega\rangle,\qquad |\sigma\rangle=f^{\dagger}|\Omega\rangle$$

$$|0\rangle_i\langle 0|=b_i^{\dagger}b_i,\qquad |\sigma\rangle_i\langle\sigma|=f_{i\sigma}^{\dagger}f_{i\sigma},\qquad \tilde{c}_{i\sigma}^{\dagger}=|\sigma\rangle_i\langle 0|=f_{i\sigma}^{\dagger}b_i$$

- b满足玻色子对易关系，f满足费米子反对易关系
- 约束关系：$1=|0\rangle_i\langle 0|+\sum_\sigma|\sigma\rangle_i\langle\sigma|=b_i^{\dagger}b_i+\sum_\sigma f_{i\sigma}^{\dagger}f_{i\sigma}$
- 两种元激发：b_i为无自旋玻色子（空穴子，holon），f_i为自旋1/2费米子（自旋子，spinon）
- “自旋-电荷分离”（Tomonaga 1950s, Luttinger 1963, Haldane 1981）

2.2 t-J模型的平均场理论

- Slave boson表象下的t-J模型（Baskaran, Zou and Anderson, 1987）
- $1-\delta=\langle\sum_\sigma f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma}\rangle$，$\delta=\langle b_i^\dagger b_i\rangle\ll 1$

$$H_{tJ}=-t\sum_{ij}(b_j^\dagger b_i f_{i\sigma}^\dagger f_{j\sigma}+h.c.)-J/2\sum_{ij\sigma}(f_{i\sigma}^\dagger f_{j\bar{\sigma}}^\dagger f_{j\bar{\sigma}} f_{i\sigma}+f_{i\sigma}^\dagger f_{j\bar{\sigma}}^\dagger f_{i\bar{\sigma}} f_{j\sigma})$$

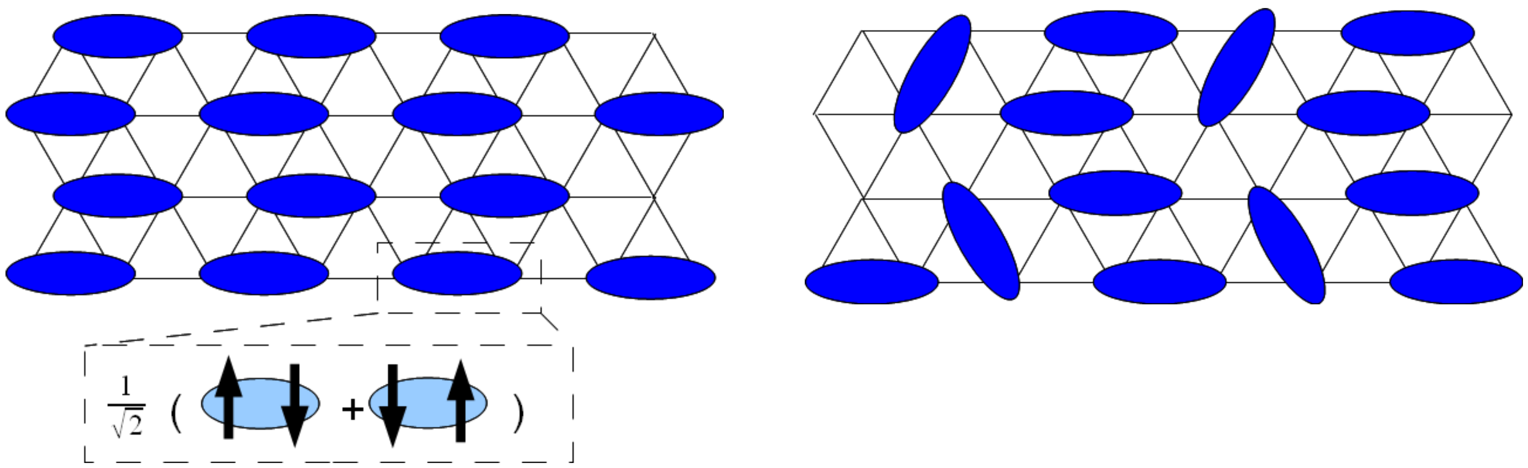
- 总的哈密顿量

$$H=H_{tJ}-\mu\sum_{i\sigma}f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma}+\sum_i\lambda_i\left(b_i^\dagger b_i+\sum_\sigma f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma}-1\right)$$

- 共振价键态（RVB）：反铁磁项可以写作$-J\sum_{ij}F_{ij}^\dagger F_{ij}$，其中$F_{ij}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(f_{i\uparrow}^\dagger f_{j\downarrow}^\dagger-f_{i\downarrow}^\dagger f_{j\uparrow}^\dagger\right)$
- 由于$F_{ij}^{\dagger 2}=0$，所以基态为$|GS\rangle=\prod_{ij}F_{ij}^\dagger|0\rangle$。
- 这就是RVB state，每两个最近邻格点上的电子都形成自旋单态。

2.2 t-J模型的平均场理论

- RVB state不是反铁磁Neel state，因为只包括最近邻格点的自旋单态，没有长程序。
- RVB是所有“近邻单态”状态的叠加，称作自旋液体（spin liquid）（Anderson, 1973）
- 实际材料中RVB状态能量低于Neel state。所以Anderson认为RVB是高温超导问题的出发点。



2.2 t-J模型的平均场理论

- 弱掺杂区的平均场理论
- 平均场序参量：$p=\sum_\sigma\langle f_{i\sigma}^\dagger f_{j\sigma}\rangle\,, q=\left\langle b_j^\dagger b_i\right\rangle, \Delta_{ij}=\langle F_{ij}\rangle=\begin{cases}\Delta_x, j=i\pm\hat{x}\\ \Delta_y, j=i\pm\hat{y}\end{cases}$
- 平均场哈密顿量（$b_j^\dagger b_i f_{i\sigma}^\dagger f_{j\sigma}\rightarrow q f_{i\sigma}^\dagger f_{j\sigma}+p/2 b_j^\dagger b_i$）

$$H=\sum_{k\sigma}(-2tq\gamma_k+\lambda)f_{k\sigma}^\dagger f_{k\sigma}+\sum_k(-tp\gamma_k+\lambda)b_k^\dagger b_k-\sum_k\Delta_k f_{k\uparrow}^\dagger f_{-k\downarrow}^\dagger+h.c.+\frac{1}{2}NJ\left(\Delta_x^2+\Delta_y^2\right)$$

- Gap equation的求解：$G=-kT\ln\left(\mathrm{Tr}e^{-\beta H}\right),\ \frac{\partial G}{\partial\Delta_i}=\frac{\partial G}{\partial q}=\frac{\partial G}{\partial p}=0$
- 自洽方程：

$$\Delta_\alpha=2J\sum_k\Delta_k\cos k_\alpha\frac{\tanh\left(\frac{\beta E_k}{2}\right)}{E_k}$$

$$q=\frac{1}{2}\sum_k\frac{\gamma_k}{e^{\omega_k/kT}+1}$$

$$p=\frac{1}{2}\sum_k\gamma_k\left(1-\frac{\epsilon_k}{E_k}\tanh\left(\frac{\beta E_k}{2}\right)\right)$$

$$\epsilon_k=\lambda-2tq\gamma_k$$
$$\omega_k=\lambda-tp\gamma_k$$
$$E_k=\sqrt{{\epsilon_k}^2+\Delta_k^2}$$

$$\gamma_k=\cos k_x+\cos k_y$$
$$\Delta_k=J\left(\Delta_x\cos k_x+\Delta_y\cos k_y\right)$$

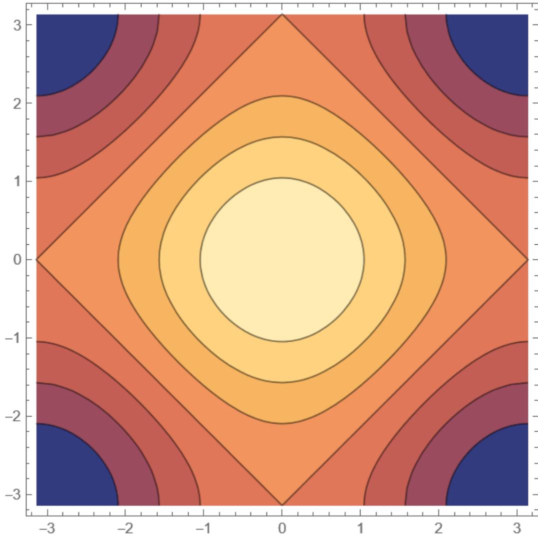
2.2 t-J模型的平均场理论

- d波超导的理论解释：
  - $T=0$时，对于$\Delta_x=\Delta_y=\Delta_s$和$\Delta_x=-\Delta_y=\Delta_d$两种情况，能隙方程分别为

$$1=J\sum_k \frac{\gamma_k^2}{\sqrt{\epsilon_k^2+\left(\sqrt{2}J\gamma_k\Delta_s\right)^2}},\qquad 1=J\sum_k \frac{\eta_k^2}{\sqrt{\epsilon_k^2+\left(\sqrt{2}J\eta_k\Delta_d\right)^2}}$$

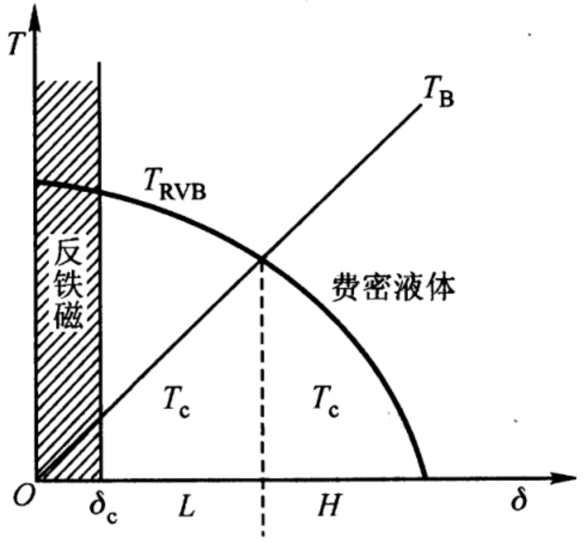
$$\gamma_k=\cos k_x+\cos k_y,\qquad \eta_k=\cos k_x-\cos k_y$$

- 对k求和主要集中在费米面附近，对于正方晶格的半满填充，费米面为$k_x+k_y=\pm\pi$，所以费米面正好为$\gamma_k=0$位置，但$\eta_k\neq 0$。
- 所以$\Delta_s<\Delta_d$，这表明d波配对更为稳定。(Kotliar and Liu, 1987)



2.2 t-J模型的平均场理论

- 赝能隙的解释：形成超导态的判据是 $\left\langle c_{i\uparrow}^{\dagger}c_{j\downarrow}^{\dagger}-c_{i\downarrow}^{\dagger}c_{j\uparrow}^{\dagger}\right\rangle=\langle b_i b_j\rangle\left\langle f_{i\uparrow}^{\dagger}f_{j\downarrow}^{\dagger}-f_{i\downarrow}^{\dagger}f_{j\uparrow}^{\dagger}\right\rangle\neq 0$
  - 需要两者均不为0才能进入超导态。
  - Kotliar-Fukuyama：$\langle b_i b_j\rangle\approx\langle b_i\rangle\langle b_j\rangle\neq 0$来自于单个空穴子的BEC
  - $\delta=\langle b_i^{\dagger}b_i\rangle$，则BEC温度由doping决定
- BEC的温度低于形成RVB的温度。
  - $T_{BEC}<T<T_{RVB}$时，电子已形成库珀对，但相位非相干，所以未进入超导态，但存在赝能隙。
  - 只有在$T<T_{BEC}$时，才能发生空穴子的凝聚，形成电阻率为0的相干状态。
- 预配对理论（Schrieffer, 1988）



2.2 t-J模型的平均场理论

- 平均场理论总结
  - 可以解释：反铁磁基态、d波超导、赝能隙
  - 无法解释：转变温度量级（预测100-1000K之间）、奇异金属态，以及更复杂的物性
- RVB理论确实触及了高温超导机理问题的核心，但是最简单版本的RVB理论不足以自洽地描述铜氧化物的准粒子行为和自旋涨落行为，尤其是无法描述电子这两种行为（巡游-局域）的二元性。

https://www.zhihu.com/question/53639649/answer/1292890399

北京大學
PEKING UNIVERSITY

PART 3

超越平均场

3.1 规范场理论简介

- Xiao-gang Wen, Patrick A. Lee, Naoto Nagaosa, 1990s-2000s
- slave-boson的$b_i^\dagger b_i + \sum_\sigma f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma} = 1$约束在平均场近似之下变为了$\langle b_i^\dagger b_i + \sum_\sigma f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma} \rangle = 1$，忽略了平均值附近的涨落行为。
- 通过规范场的引入，可以去除掉这个约束。从U(1)规范不变性$f_{i\sigma} \to e^{i\phi_i} f_{i\sigma}, b_i \to e^{i\phi_i} b_i$，通过诺特定理可以自然导出U(1)守恒荷$Q_i = b_i^\dagger b_i + \sum_\sigma f_{i\sigma}^\dagger f_{i\sigma}$。
- 类似QED中光子场，需要引入规范场，$a_{ij} \to a_{ij} + \phi_i - \phi_j, a_{0i} \to a_{0i} + \frac{\partial \phi_i(\tau)}{\partial \tau}$

$$L = \sum_{i\sigma} f_{i\sigma}^* (\partial_\tau - \mu_f + i a_{0i}) f_{i\sigma} + \sum_i b_i^* (\partial_\tau - \mu_b + i a_{0i}) b_i - Jp \sum_{ij\sigma} e^{i a_{ij}} f_{i\sigma}^* f_j - 2tq \sum_{ij} e^{i a_{ij}} b_i^* b_j + h.c.$$

- 定量地计入涨落项
- 高能物质场→规范场→低能物质场

3.1 规范场理论简介

- 规范场传播子：$D_{\mu\nu}(q,\omega)=\langle a_\mu(q,\omega)a_\nu(-q,-\omega)\rangle \approx (i\omega\sigma(q)-\chi q^2)^{-1} \approx (i\gamma\omega/q-\chi q^2)^{-1}$
- 规范场对物质场性质的影响：
  - 准粒子寿命：由于$\Sigma(k,\omega)\sim\int \mathrm{d}q\mathrm{d}\Omega\frac{\mathrm{Im}\,D(q,\Omega)}{\omega-\epsilon_k-\Omega+i\eta}$，$\mathrm{Im}\,\Sigma(\omega)\propto\omega$
  - 电导率：散射来自于物质场和规范场的相互作用，所以不受其他因素影响，电导率可以在高于 $T_P=\frac{\hbar}{k_B\tau_p}$ 的很大一段区间内保持温度线性。
  - 不存在准粒子的费米面
- SU(2)规范理论（文小刚）、规范退禁闭和自旋液体

- 超出平均场理论，解释了非费米液体行为，作为唯象理论价值很高，但和实验对不上。

3.2 SO(5)唯象理论

- Shou-Cheng Zhang, Eugene Demler, 1995s-2000s
- 主要切入点：平均场高估了转变温度，所以主导的应该是低能自由度。
- 竞争序：反铁磁、d波超导、RVB。没有明显的能量尺度差别，所以很难使用重整化积分掉高能自由度，但是可以从对称性角度出发研究低能的哈密顿量。

- AFM & SC：SO(3)×U(1)
- CDW & SC：SO(4)（杨振宁，1989）
- 最小对称性为SO(5)
- 序参量：五维spinor
  - $n_{1,5}$为超导配对序参量，$n_{2,3,4}$为AFM序参量
  - SO(3)部分为$n_{2,3,4}$子空间内部变换，U(1)为$n_{1,5}$内部变换
  - SO(5)对称性的引入表明AFM和SC可以互相变换

$$n_1 = \Delta^\dagger + \Delta$$

$$n_5 = -i\left(\Delta^\dagger - \Delta\right)$$

$$n_{2,3,4} = \sum_p c^\dagger_{p+Q,i}\sigma^{x,y,z}_{ij}c_{pj}\,, Q = (\pi,\pi)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_p (\cos p_x - \cos p_y)c^\dagger_{p\uparrow}c_{-p\downarrow}$$

3.2 SO(5)唯象理论

- SO(5)的生成元：
  - 3+1=4个SO(3)和U(1)：$S_a=\sum_p c_{pi}^\dagger \sigma_{ij}^a c_{pj}, Q=\sum_{pi} c_{pi}^\dagger c_{pi}$
  - 剩下6个：$\pi_a^\dagger=\sum_p\left(\cos p_x-\cos p_y\right) c_{p+Q,i}^\dagger\left(\sigma^\alpha \sigma^y\right)_{ij} c_{-pj}, \pi_a=\left(\pi_a^\dagger\right)^\dagger$
  - SO(3)和U(1)是t-J哈密顿量的严格对称性，但π不是，然而$\left[H, \pi_a^\dagger\right]=(J(1-n)/2-2\mu) \pi_a^\dagger$，所以$\pi_a^\dagger$可视为升降算符（本征值意义下是对称性）
  - 卡西米尔算符$C=\sum L_{ab}^2$为严格对称性。

- 对d波超导的预测：$\tilde{\pi}_\alpha^\dagger=\sum_p\left(\cos p_x+\cos p_y\right) c_{p+Q,i}^\dagger\left(\sigma^\alpha \sigma^y\right)_{ij} c_{-pj}$不是对称性，所以不是s波超导

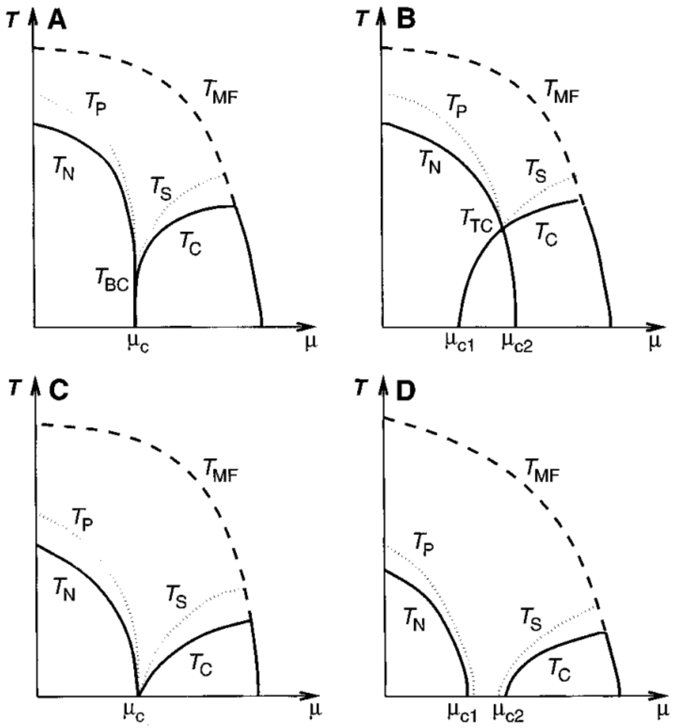
3.2 SO(5)唯象理论

$$H_a = \sum_{a<b} \frac{1}{2\chi_{ab}} L_{ab}(x)^2 + \sum_{a<b} \frac{\rho_{ab}}{2}[v^k_{ab}(x)]^2 + V(n)$$

- 有效模型的建立
  - 在平均场转变温度之下，n模长固定
  - 随着参数变化，基态可以在AFM和SC之间发生“自旋翻转”
- 在基态附近展开可以得到集体模式：
  - 对于AFM基态，存在AFM自旋波和SC“配对密度波”两种激发
  - 对于SC基态，存在声子和类似超流旋子（roton）的激发
  - 还有对应π自由度的模式（在YBCO中被观测到）
- 相图

$$\begin{aligned}\chi_\pi\partial_t^2 n_1 &= \rho_\pi\partial_k^2 n_1 \\ &\quad - [g-(2\mu)^2\chi_\pi]n_1 - 4\mu\chi_\pi\partial_t n_5 \\ \chi_s\partial_t^2 n_\alpha &= \rho_s\partial_k^2 n_\alpha, \quad \alpha = 3,4 \\ \chi_\pi\partial_t^2 n_5 &= \rho_\pi\partial_k^2 n_5 \\ &\quad - [g-(2\mu)^2\chi_\pi]n_5 + 4\mu\chi_\pi\partial_t n_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_c\partial_t^2 n_5 &= \rho_c\partial_k^2 n_5 \\ \chi_\pi\partial_t^2 n_\alpha &= \rho_\pi\partial_k^2 n_\alpha - [\chi_\pi(2\mu)^2 - g]n_\alpha\end{aligned}$$

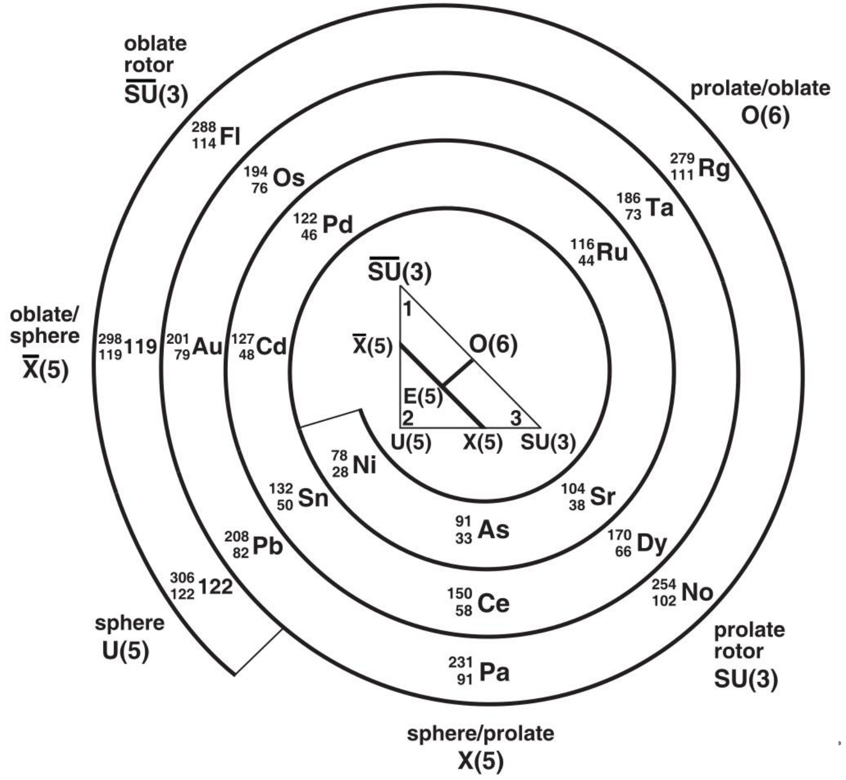


3.2 SO(5)唯象理论

- 超导机制：高能的自旋单态形成（对应n模长固定）和低能的AFM→SC转变（对应n翻转）
- 在doping之下，前者温度降低，后者温度升高。

Hubbard and t-J models of the electrons	*coarse-graining transformation* $\Longrightarrow$	Quantum $SO(5)$ model of the superspin	*analytical and numerical calculations* $\Longrightarrow$	Phase diagram Collective modes Other experiments...

- 有效模型/唯象模型
  - 只依赖于模型的对称性
  - 对称性得到的低能模式很准确
- 原子核和分子的振动理论
  - 小振动由玻色子产生算符描述
  - N个玻色子算符可形成U(N)李代数
  - 使用李代数的分解可以得到对称性破缺的方式，对应振动状态。
  - Arima & Iachello, interacting boson model （1980s）



北京大學
PEKING UNIVERSITY

PART 4

总结

4. 总结

- 2000s，莫特绝缘体的掺杂被认为是高温超导的原理（Wen Lee Nagaosa）。t-J模型足够解释超导和赝能隙的出现。
- 2016年，Anderson认为RVB已经能给出超导的大部分内容。
  - “材料科学中的问题往往是超定的而非欠定的。我们有太多的数据，任何不与数据中的显著事实相违背的假设都很可能是正确的。”
  - 最简版本的理论（指RVB理论）已经可以给出关于系统能标和核心特征满意的解释……炒作出的所谓“超导谜团”似乎不无例外地是理论学家为了利益的故弄玄虚。

https://www.zhihu.com/question/53639649

4. 总结

- 铜基超导体仍无完整的，可以解释所有实验物性的理论。
  - 首先实际材料远比t-J模型复杂（声子/自旋/杂质？）
  - 其次高温超导是非微扰的现象
    - 朗道费米液体：只要相互作用的微扰理论收敛，费米系统行为将与无相互作用系统定性一致。微扰发散只来源于对称性的自发破缺，但可以在新的对称破缺的鞍点进行微扰展开，并考虑自发对称破缺引入的新的低能自由度对准粒子的散射。
    - 排除了微扰发散并不伴随对称性的自发破缺，而是形成高度关联的非费米液体状态这种可能。目前只有非费米液体的个别特例，而不了解一般的非费米液体是什么样。

https://www.zhihu.com/question/394731988

- 即使对于BCS超导体，之前理论认识也不够，2001年发现的BCS超导体MgB2转变温度为39K，超越了此前BCS的麦克米兰极限（30K）。近年来的转角石墨烯超导和铜基超导有诸多相似之处，但后来发现主要还是电声耦合与拓扑的作用（arxiv 2402.00869）。人们甚至发现量子几何在电声耦合中可能起很大作用（arxiv 2305.02340）。

参考文献

- 李正中，固体理论
- Patrick A. Lee, Naoto Nagaosa, Xiao-Gang Wen, Doping a Mott insulator: Physics of high-temperature superconductivity, Rev. Mod. Phys, 78(1), 2006
- Shou-Cheng Zhang, A Unified Theory Based on SO(5) Symmetry of Superconductivity and Antiferromagnetism, Science 275, 1089 (1997)
- Eugene Demler, Werner Hanke, Shou-Cheng Zhang, SO(5) theory of anti-ferromagnetism and superconductivity, Rev. Mod. Phys, 76(3), 2004
- Anderson, Last words on the cuprates, arxiv 1612.03919

感谢大家的聆听

量子力学讨论班

林沛晗